Comparaisons analytiques et numériques de schémas d'homogénéisation incrémentaux en champs moyens

Eléonore Bourdier[1], Sophie Dartois[1], Rémi Cornaggia[1], Marc Quiertant[2], Renald Brenner[1]

[1]Sorbonne Université, Institut Jean le Rond d'Alembert, Paris; [2]ESTP, Institut de Recherche, Cachan

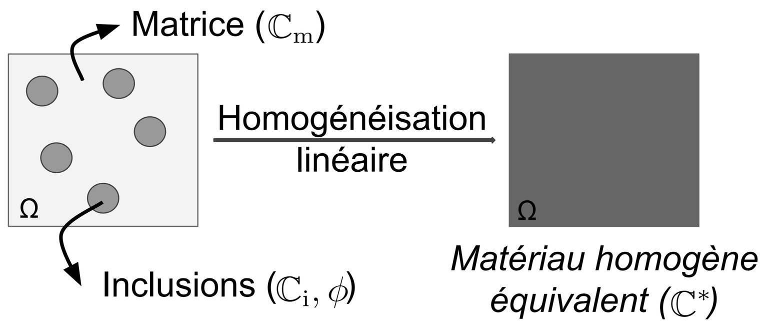
eleonore.bourdier@sorbonne-universite.fr

CONTEXTE

La **modélisation** du comportement des **matériaux composites à forte concentration d'inclusions**, tout en tenant compte de la complexité de leurs **microstructures**, reste un défi majeur. Mon objectif est de déterminer les **propriétés mécaniques** de ces matériaux à l'aide de **méthodes d'homogénéisation**. Des schémas d'homogénéisation linéaire en champs moyens, en particulier des **schémas incrémentaux**, ont été développés pour ces matériaux, il est essentiel d'évaluer leur performance dans une variété de milieux. Dans cette étude, je présente deux schémas de ce type, l'un **différentiel** et l'autre **itératif**, en les comparant et en les appliquant à des milieux de complexité croissante.

PRINCIPE D'HOMOGÉNÉISATION EN CHAMPS MOYENS

Le principe est de remplacer un matériau hétérogène par un **matériau homogène équivalent** ayant les mêmes propriétés macroscopiques.



Propriétés mécaniques du milieu homogène équivalent :

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}_m + \phi(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \mathbb{A}$$

$\mathbb{C}^*$: Tenseur de rigidité effectif
ϕ : Fraction volumique des inclusions
$\mathbb{A}$: Moyenne du tenseur de localisation des inclusions

DEUX SCHÉMAS INCRÉMENTAUX

Le principe est de construire le matériau homogène équivalent **en n étapes** : $\delta\phi = \frac{\phi_{tot}}{n}$

Schéma différentiel [1] [3]

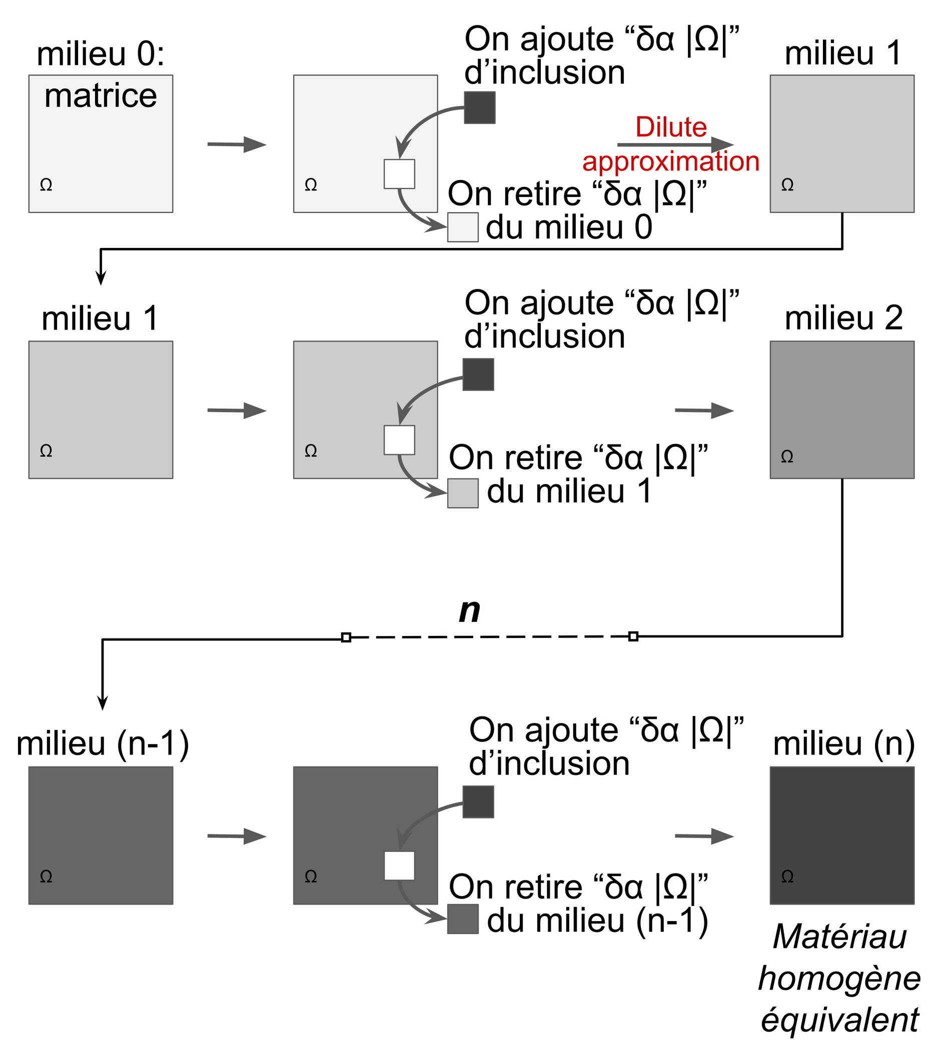
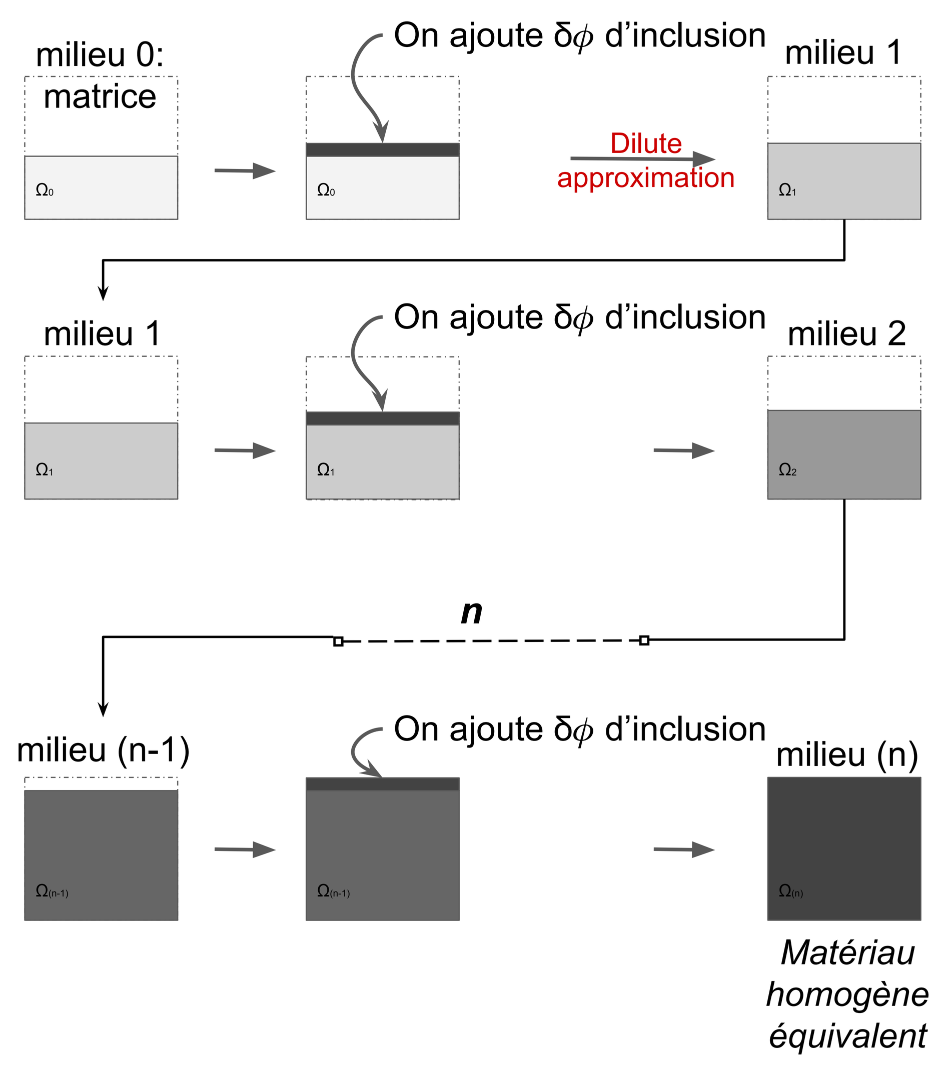


Schéma itératif [2]



Différences :

- Les inclusions sont introduites par remplacement / ajout.
- Le volume des différents milieux est constant / varie tout au long des étapes.

Similarités :

- Le volume remplacé / ajouté doit être faible par rapport au volume total du milieu pour utiliser une approximation diluée.
- Les propriétés du milieu intermédiaire (j) sont exprimées par les propriétés du milieu précédent (j-1), les propriétés des inclusions et le taux de remplacement / remplissage.

Forme discrète (à l'étape (j)) :

$$\mathbb{C}_{dif}^{(j)} = \mathbb{C}_{dif}^{(j-1)} + \delta\alpha_{(j)} \left(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{dif}^{(j-1)}\right) : \mathbb{A}_{dd}$$

*"Taux de **remplacement**"* : $\delta\alpha_{(j)} = \frac{\delta\phi}{1-\phi^{(j-1)}}$

$$\mathbb{C}_{it}^{(j)} = \mathbb{C}_{it}^{(j-1)} + c_{(j)} \left(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{it}^{(j-1)}\right) : \mathbb{A}_{dd}$$

*"Taux de **remplissage**"* : $c_{(j)} = \frac{\delta\phi}{1-\phi_{tot}+\phi^{(j)}}$

Forme continue $(n \to \infty)$:

$$\frac{d}{d\phi}\mathbb{C}_{dif} = \frac{1}{1-\phi}\left[(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{dif})^{-1} + \mathbb{P}\right]^{-1} \quad [3]$$
$$\mathbb{C}_{dif}(0) = \mathbb{C}_m$$

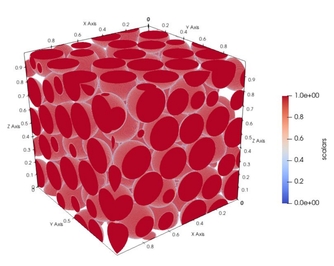
$$\frac{d}{d\phi}\mathbb{C}_{it} = \frac{1}{1-\phi_{tot}+\phi}\left[(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{it})^{-1} + \mathbb{P}\right]^{-1}$$
$$\mathbb{C}_{it}(0) = \mathbb{C}_m$$

Un changement de variable prouve que l'on a le **même problème de Cauchy**.
Les deux méthodes sont appliquées différemment mais convergent vers les mêmes solutions !

$$\mathbb{C}_{dif}(\phi_{tot}) = \mathbb{C}_{it}(\phi_{tot})$$

FFT simulations

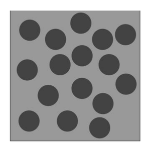
***CraFT:** Composite response and Fourier Transforms* [4]



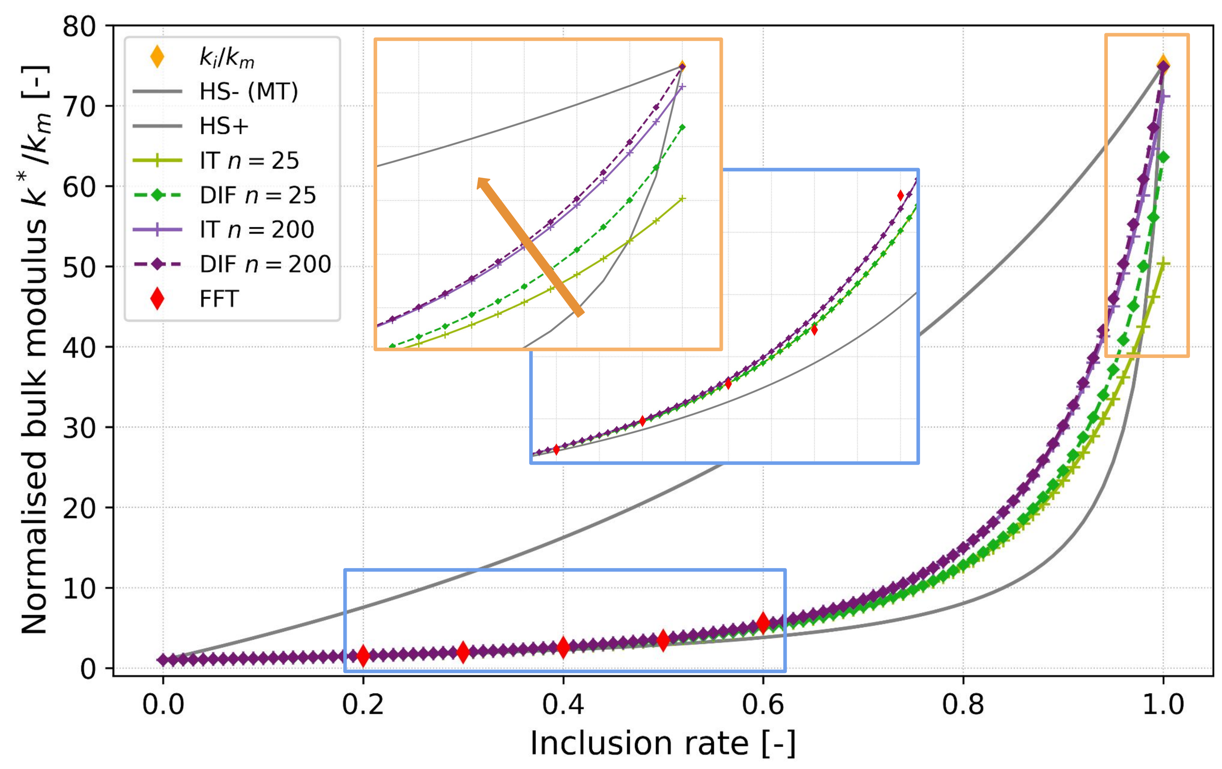
- 100 sphères de même rayon
- 400x400x400 voxels pour chaque VER
- Simulations pour $\phi_{tot} = 20, 30, 40, 50, 60\%$

APPLICATIONS

Milieux biphasés isotropes avec inclusions sphériques



$E_m = 1$ GPa $\nu_m = 0.2$
$E_i = 50$ GPa $\nu_i = 0.3$



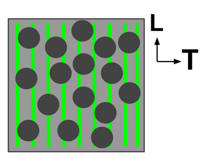
- Bonnes approximations avec les résultats FFT (écart relatif < 10% for n = 200)
- Courbe limite identique à celle attendue / **Vitesses de convergence différentes**

➔ Considération d'un **critère sur le nombre de milieux intermédiaires n** permettant d'utiliser **indifféremment** les deux schémas :

$$n > \frac{\phi_{tot}(1-\ell)}{\ell(1-\phi_{tot})} \quad \ell = 1\%$$

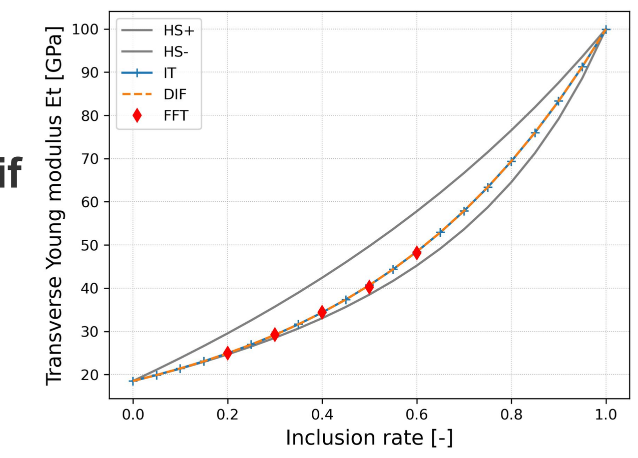
ANISOTROPIE ET MICROSTRUCTURES PLUS COMPLEXES

Matrice isotrope transverse avec inclusions sphériques

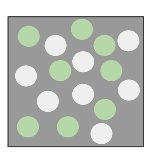


$E_l = 59$ GPa $\nu_{lt} = 0.12$ $\mu_{lt} = 7.25$ | $E_i = 100$ GPa $\nu_i = 0.3$
$E_t = 19$ GPa $\nu_{tt} = 0.43$

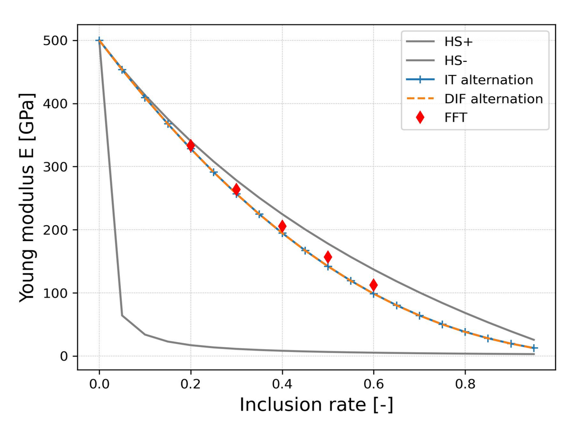
- Critère sur n :
  ➡ **même comportement effectif** pour les deux schémas
- Résultats conformes aux simulations FFT



Milieux multiphasiques



$E_m = 500$ GPa $\nu_m = 0.2$
$E_1 = 25$ GPa $\nu_1 = 0.25$
$E_2 = 1$ GPa $\nu_2 = 0.25$

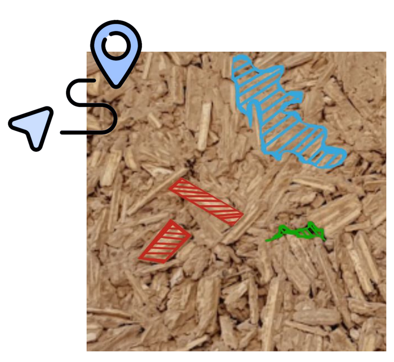


Introduction des différentes familles d'inclusions par alternance
➡ **L'ordre d'introduction peut avoir une influence**

➡ **Pour les inclusions non sphériques, variation de l'anisotropie d'une étape à l'autre**

CONCLUSION

- Les deux méthodes convergent vers le même comportement, mais **pas à la même vitesse**.
  ➡ **Un critère sur le nombre de milieux intermédiaires** a été introduit.
- Nos résultats sont très proches de ceux en FFT jusqu'à 60% d'inclusions pour des milieux anisotropes et multiphasiques.
  ➡ **Confiance sur les résultats pour des taux d'inclusions plus élevés.**



Bétons à renforts végétaux

RÉFÉRENCES

[1] S. Boucher, "On the Effective Moduli of Isotropic Two-Phase Elastic Composites", *Journal of Composite Materials*, 1974.
[2] Benhamida and al., "Clay compaction modelling by homogenization theory", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2005.
[3] R. W. Zimmerman, "Elastic moduli of a solid containing spherical inclusions", *Mechanics of Materials*, vol. 12, 1991.
[4] H. Moulinec and F. Silva, "Comparison of three accelerated fft-based schemes for computing the mechanical response of composite materials", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2014.