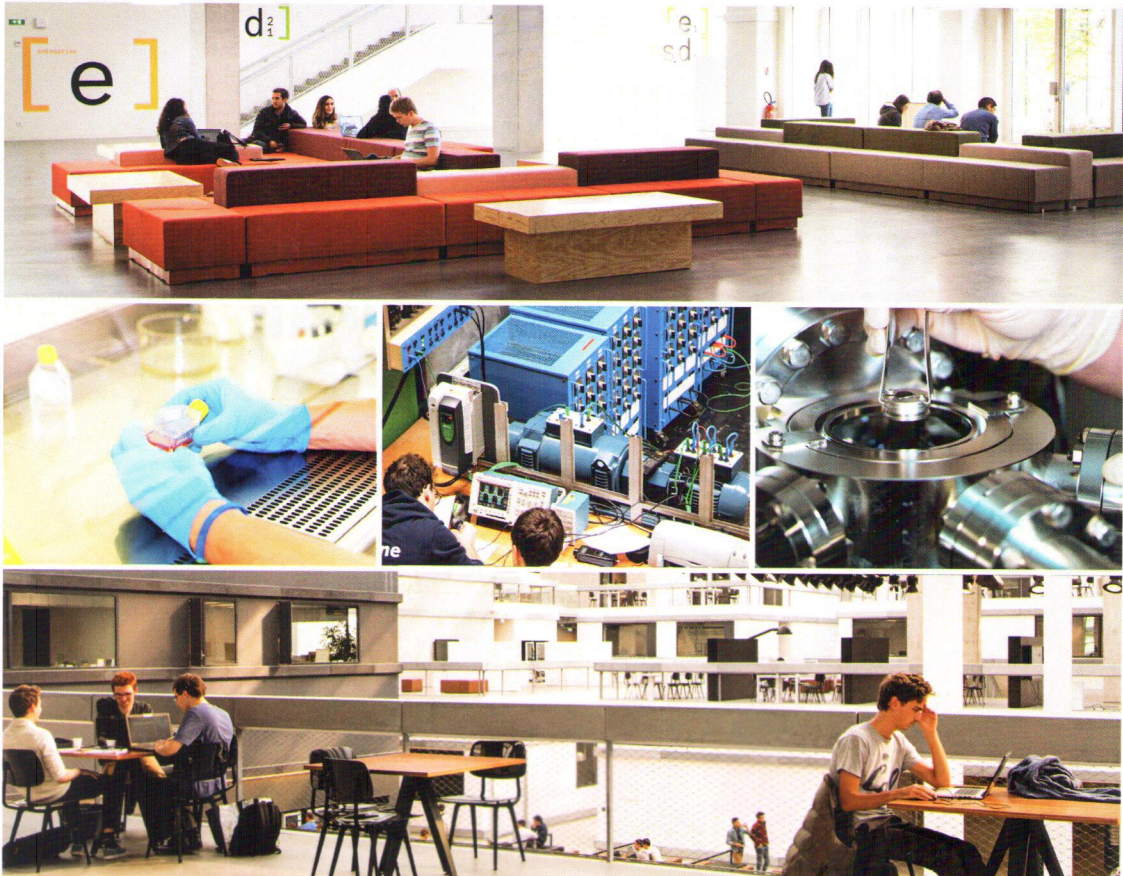


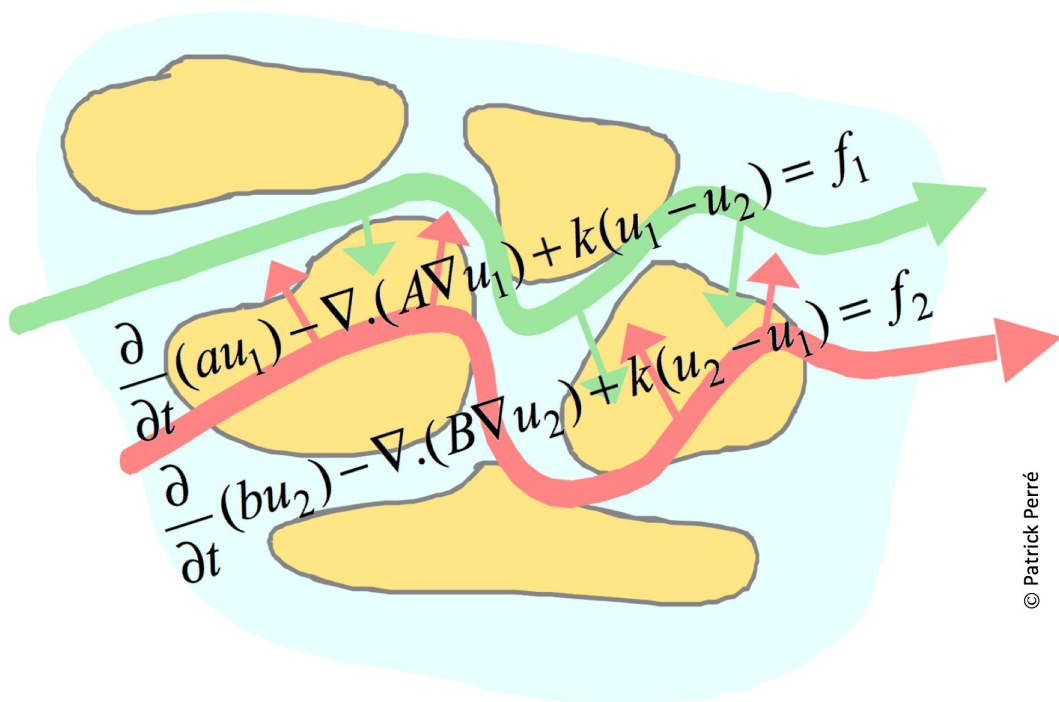
TRANSFERTS COUPLÉS DE MASSE ET DE CHALEUR

PATRICK PERRÉ



Polycopié de cours

Transferts couplés de masse et de chaleur



Prof. Patrick Perré
Laboratoire de Génie des Procédés et Matériaux (LGPM),
CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, France

Janvier 2025

Table des matières

1	Equilibres	5
1.1	L'eau corps pur : diagramme de phases	5
1.2	L'air humide	7
1.2.1	Quantifier l'eau dans l'air	7
1.2.2	Construction du diagramme enthalpique	8
1.2.3	Transformations élémentaires d'une masse d'air	10
1.3	L'eau capillaire	12
1.3.1	Tension superficielle	12
1.3.2	Système à trois phases : deux liquides et un solide	14
1.3.3	Pression de vapeur à la surface du ménisque	16
1.4	Equilibre hygroscopique	17
1.4.1	Isothermes de sorption	17
1.4.2	Chaleur différentielle de sorption	18
2	Configurations hors-équilibre	20
2.1	Transferts dans un milieu homogène	20
2.1.1	Conduction thermique (loi de Fourier)	20
2.1.2	Transfert de masse (loi de Fick)	22
2.1.3	Transfert de quantité de mouvement (loi de Newton)	23
2.1.4	Analogie des phénomènes	23
2.2	Bilan de conservation	24
2.2.1	Forme locale des équations de conservation	24
2.2.2	Transferts dans la couche limite	26
2.2.3	Analogie entre transfert de chaleur et transfert de masse	29
2.2.4	Corrélations pour deux configurations fréquemment rencontrées	32
2.3	Transferts dans un milieu poreux	34
2.3.1	Introduction	34
2.3.2	Perméabilité	36
2.3.3	Diffusion massique	40
2.3.4	Migration capillaire	41
3	Transferts couplés	42
3.1	La température humide	42
3.2	Description du séchage convectif	44
3.2.1	Phase de séchage à vitesse constante (Première phase de séchage)	44

3.2.2	La phase de séchage à vitesse décroissante	46
3.2.3	Séchage avec vaporisation interne	46
3.3	Analyse du séchage convectif	47
3.3.1	La première phase de séchage	49
3.3.2	Le concept de courbe caractéristique	51
4	Références bibliographiques	54
A	Annexes : données thermophysiques	57
A.1	Données thermophysiques de l'eau, de l'air et de la vapeur d'eau	58
A.2	Pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température	59
A.3	Données complémentaires sur l'eau	60
A.4	Caractéristiques typiques de quelques solides	61
A.5	Autres données utiles	62

1 Equilibres

1.1 L'eau corps pur : diagramme de phases

L'eau, substance pure, peut exister sous plusieurs formes : glace, liquide, vapeur. La figure 1 schématise les zones relatives à chaque état dans le diagramme (P, T) . Lorsque deux formes coexistent, une seule des deux grandeurs intensives reste indépendante (règle des phases de Gibbs) : il existe entre elles une relation qui peut s'écrire $P = f(T)$. En fait, dans ce cas, une autre grandeur est nécessaire pour connaître la proportion des deux phases.

Au point triple (présence des trois phases), les deux grandeurs P et T sont déterminées ($0,01^\circ\text{C}$ et $611,2\text{ Pa}$ pour l'eau). Au point critique, la chaleur latente de vaporisation s'annule. Il n'est plus possible de distinguer les phases liquide et gazeuse : au-dessus de ce point, il n'existe plus qu'une phase fluide.

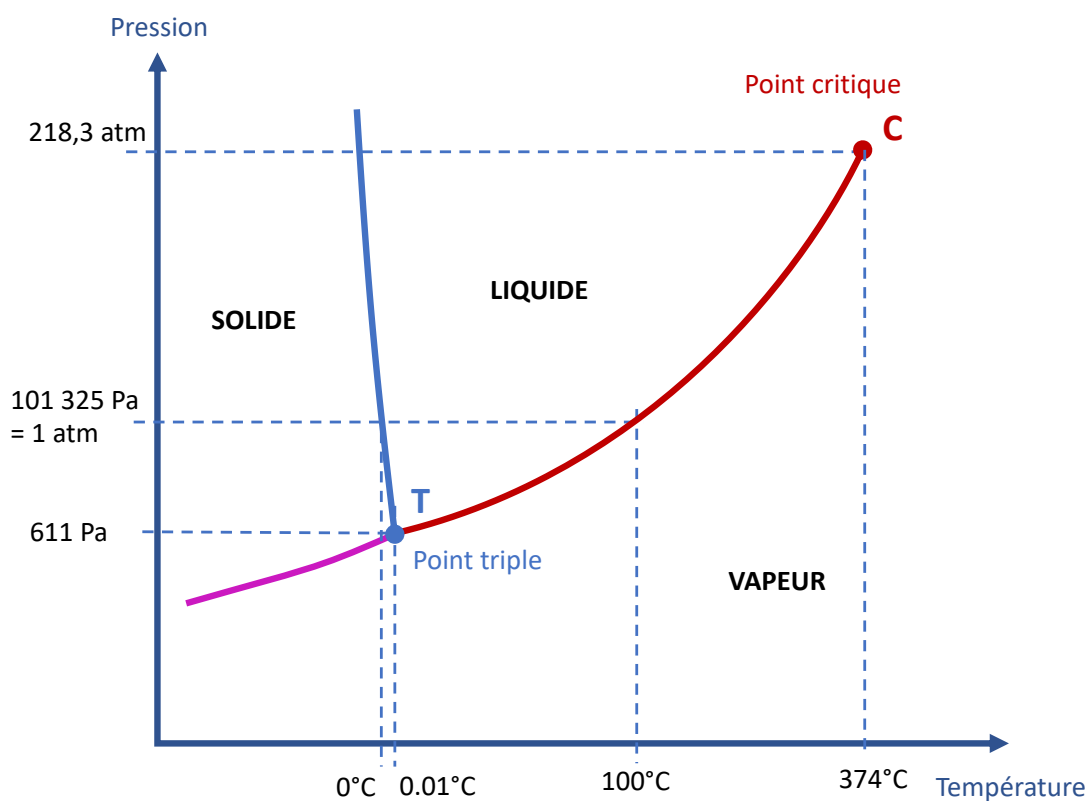


FIGURE 1 – Diagramme de phases de l'eau.

En l'absence de travail autre que volumique, la différentielle de la fonction de Gibbs s'écrit :

$$dG = VdP - SdT \quad (1)$$

Lors d'un changement d'état, la pression et la température sont constantes, d'où :

$$dG = 0 \quad (2)$$

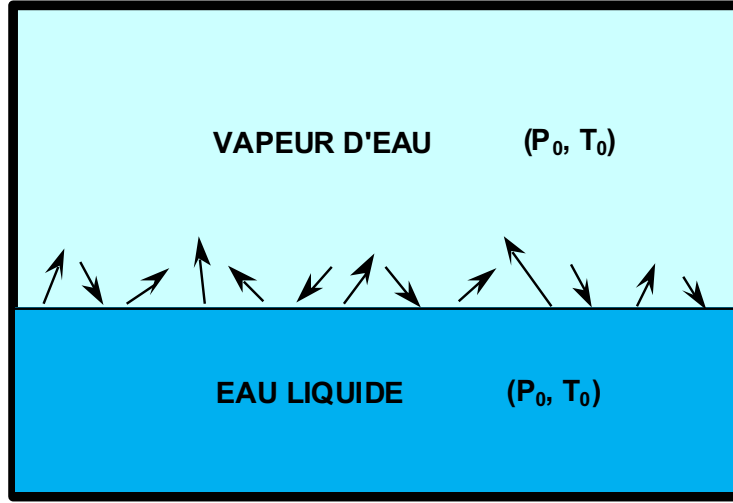


FIGURE 2 – Equilibre entre les phases liquide et gazeuse d'un corps pur.

Cette variation nulle peut aussi s'exprimer comme la variation des enthalpies libres spécifiques des phases gazeuse et liquide :

$$dG = g_\ell \cdot dm_\ell + g_v \cdot dm_v = 0 \quad (3)$$

Pendant la transformation, $dm_\ell = -dm_v$ soit $g_\ell = g_v$. En conséquence, la valeur spécifique de la fonction de Gibbs (g) est la même pour toutes les phases en équilibre d'un corps pur. L'équilibre liquide-vapeur (celui qui intervient en séchage) peut s'obtenir facilement en vaporisant de l'eau dans le vide. L'équilibre est en fait un équilibre dynamique entre les flux à l'interface liquide-gaz : les molécules d'eau liquide qui passent dans la phase gazeuse grâce à l'agitation thermique et le flux des molécules de la phase gazeuse captées par l'interface (Fig. 2). A l'équilibre, à la température T_0 , nous avons $g_v = g_\ell$.

à $T_0 + dT$, l'équilibre se déplace de façon à conserver la relation précédente, d'où :

$$dg_v = dg_\ell \quad \text{d'où} \quad s_\ell dT - v_\ell dP = s_v dT - v_v dP \quad (4)$$

Nous obtenons ainsi la relation de Clausius-Clapeyron :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_v - s_\ell}{v_v - v_\ell} = \frac{L_v}{T(v_v - v_\ell)} \quad (5)$$

L_v est la chaleur latente de vaporisation à la température T (J/kg).

Les ordres de grandeur des volumes spécifiques ($v_v \gg v_\ell$) et la loi des gaz parfaits appliquée à la vapeur ($P_v V = nRT$) permettent de simplifier la relation précédente :

$$\frac{dP_{vs}}{P_{vs}} \simeq \frac{L_v M_v dT}{RT^2} \quad (6)$$

Connaissant L_v , cette formule de Clausius-Clapeyron donne par intégration la courbe $P_{vs}(T)$ de l'équilibre liquide-vapeur. Loin du point critique, il est raisonnable de considérer

que les chaleurs sensibles sont constantes. La chaleur latente s'écrit :

$$L_v = L_v^0 + (C_{pv} - C_{p\ell})(T - T_0) = A + BT \quad (7)$$

Ainsi, en reportant dans l'équation (6) nous obtenons la formule de Dupré :

$$\ln(P_{vs}) = -\alpha \ln(T) - \frac{\beta}{T} + \gamma \quad (8)$$

Cependant, sur une plage restreinte de température (entre 0°C et 100°C par exemple), la chaleur latente de vaporisation varie peu. En la supposant constante, l'intégration de (6) aboutit à une loi d'Arrhénius :

$$P_{vs} = P_0 \exp(-E/RT) \quad (9)$$

Jusqu'à présent, nous avons considéré l'existence d'un corps pur unique. A la pression atmosphérique, l'air sec présent à la surface du liquide modifie la pression du liquide. La pression de vapeur correspondante P_v est obtenue en intégrant, à température constante, la variation de pression liquide P_ℓ de P_{vs} à P_{atm} :

$$\frac{dP_\ell}{\rho_\ell} = \frac{RT}{M_v} \times \frac{dP_v}{P_v} \quad (10)$$

L'intégration de cette équation donne la relation finale :

$$\frac{P_{atm} - P_{vs}}{\rho_\ell} = \frac{RT}{M_v} \ln\left(\frac{P_v}{P_{vs}}\right) \quad (11)$$

Cette expression donne la correction à apporter pour obtenir la pression de vapeur saturante à la pression atmosphérique. En valeur relative, la correction est inférieure à 6.10^{-4} pour la pression atmosphérique à 25°C. En pratique, elle pourra être négligée. En revanche, le phénomène de capillarité peut conduire à des corrections beaucoup plus importantes (voir la partie sur la pression capillaire).

1.2 L'air humide

1.2.1 Quantifier l'eau dans l'air

En règle générale, toute masse d'air comporte une part non négligeable de vapeur d'eau. Lors d'une opération de séchage, il est fondamental de pouvoir quantifier l'humidité contenue dans l'air, de suivre son évolution et de savoir réguler son niveau. Le diagramme enthalpique de l'air humide, qui est présenté dans ce paragraphe, donne les bases nécessaires à ces objectifs. Il permet également de faire des bilans énergétiques, préalable obligatoire au dimensionnement de séchoirs. L'air sera ici assimilé à un mélange de deux gaz parfaits, l'air sec et la vapeur d'eau. Une masse d'air occupant un volume V à la température T peut être caractérisée par la pression partielle, la masse ou la densité de chaque constituant (resp. P_a et P_v , m_a et m_v , ρ_a et ρ_v). A partir de ces valeurs, plusieurs grandeurs peuvent déterminer la richesse en vapeur du mélange :

Le titre massique, masse de vapeur d'eau ramenée à la masse totale :

$$\tau = \frac{m_v}{m_a + m_v} \quad (12)$$

L'humidité spécifique, ou teneur en eau, masse d'eau ramenée à la masse d'air sec :

$$Y = \frac{m_v}{m_a} \quad (13)$$

Le degré hygrométrique ou humidité relative :

$$\text{HR} = \frac{P_v}{P_{vs}(T)} \quad (14)$$

Le titre massique a pour avantage de tendre vers l'unité quand la fraction d'air sec tend vers zéro (alors que Y tend vers l'infini). Cette grandeur est donc bien adaptée aux configurations à haute température. Avec des température modérées ($m_v \ll m_a$), Y et HR sont deux grandeurs complémentaires :

- La teneur en eau Y permet de faire des bilans massiques. La référence à la masse d'air sec assure un comportement linéaire en teneur en eau, ce qui facilite le calcul des apports d'eau ou de mélange d'air de caractéristiques différentes,
- l'humidité relative est une grandeur surprenante, qui change souvent plus fortement en raison d'un changement de température que d'un changement de teneur en eau. Elle est cependant très utile car nous renseigne sur le pouvoir évaporatoire de l'air.

1.2.2 Construction du diagramme enthalpique

Le diagramme enthalpique de l'air humide est un outil très efficace pour comprendre et étudier les propriétés et les transformations d'une masse d'air humide. Il représente l'enthalpie par kg d'air sec, en fonction de la température et de la teneur en vapeur (Y : kg d'eau par kg d'air). Par convention la référence est prise à 0°C.

- l'enthalpie de l'air sec est nulle à 0°C,
- l'enthalpie de **l'eau liquide** est nulle à 0°C.

L'enthalpie spécifique de l'air h_a à la température T est simplement obtenu via la chaleur sensible nécessaire pour le faire passer de 0°C à la température T (en °C). Cela fait intervenir la capacité thermique massique (appelée également chaleur massique ou chaleur spécifique) à pression constante. Pour construire le diagramme, les capacités thermiques massiques sont supposées constantes :

$$h_a = C_{pa}T \quad (15)$$

L'enthalpie spécifique de la vapeur d'eau h_v à la température T est obtenue par évaporation de l'eau à 0°C puis chauffage de la vapeur jusqu'à la température T (en °C). l'expression fait donc intervenir à la fois la chaleur latente de vaporisation à 0°C (L_v^0) et la capacité thermique massique de la vapeur d'eau :

$$h_v = L_v^0 + C_{pv}T \quad (16)$$

Remarque : L'enthalpie, variable d'état, ne dépend pas du chemin suivi. On aurait donc pu aussi chauffer l'eau liquide jusqu'à la température T puis évaporer le liquide à la température T :

$$h_v = C_{p\ell}T + L_v(T) \quad (17)$$

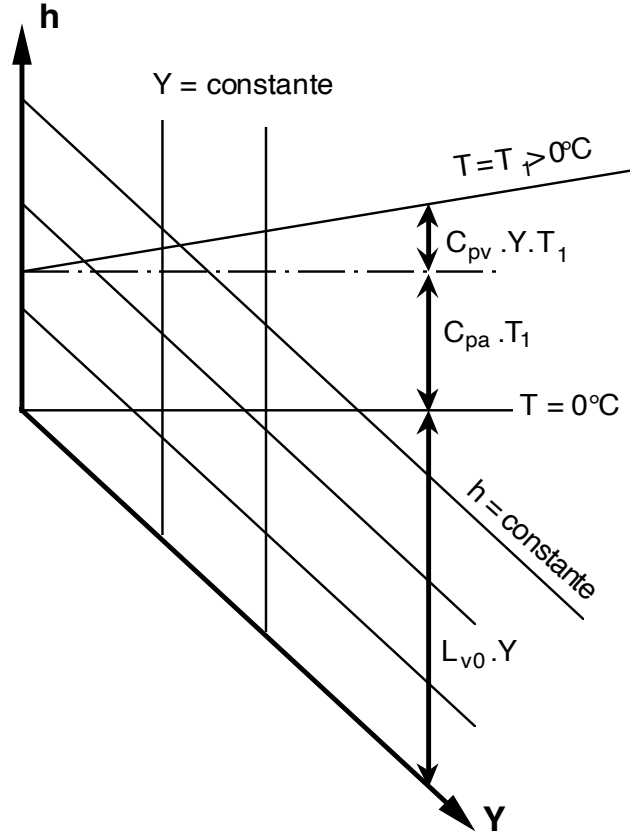


FIGURE 3 – Principe de construction du diagramme enthalpique de l'air humide.

La relation (16) est préférable car elle fait intervenir une valeur constante de la chaleur latente de vaporisation, sa valeur à 0°C. En revanche, puisque l'enthalpie dépend pas du chemin suivi, les équations (16) et (17) permettent de trouver la dépendance de L_v avec la température (avec l'hypothèse que les chaleurs massiques sont constantes sur l'intervalle de température considéré).

$$L_v(T) = L_v^0 + (C_{pv} - C_{pl})T \quad (18)$$

Cette relation nous informe que la chaleur latente de vaporisation décroît avec la température. Elle vaut par exemple 2505 kJ/kg à 0°C et 2250 kJ/kg à 100°C.

Dans ces conditions, l'enthalpie par kg d'air sec, h , d'une masse d'air humide à la température T (en °C) et avec une teneur en eau Y s'écrit :

$$h = C_{pa}T + Y(L_v^0 + C_{pv}T) \quad (19)$$

Le diagramme enthalpique est construit en portant Y en abscisses et h en ordonnées, le tout dans un repère non orthogonal. En effet, pour ne pas réduire la partie intéressante du graphique à un secteur situé en haut près de l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses doit pivoter vers le bas. Il est commode d'ajuster la rotation de façon à rendre horizontale la droite correspondant à $T = 0^\circ\text{C}$ (Fig. 3).

Dans ce graphique, les isothermes (courbes d'égale température) sont des droites d'autant plus inclinées que la température est élevée. Le croisement du faisceau d'isothermes

avec l'axe vertical permet de graduer ce dernier en température. L'échelle obtenue est linéaire puisque, pour $Y = 0$, $h = C_{pa}T$. Pour terminer le diagramme enthalpique (Fig. 4), les courbes d'égale humidité relative (HR) y sont également tracées. Pour cela, il suffit d'utiliser la relation qui lie HR à Y :

$$Y = \frac{M_v}{M_a} \times \frac{\text{HR } P_{vs}(T)}{P_{atm} - \text{HR } P_{vs}(T)} \quad (20)$$

1.2.3 Transformations élémentaires d'une masse d'air

Ces transformations élémentaires tracées sur le diagramme enthalpique (Fig. 5) permettent de représenter la plupart des transformations rencontrées dans la nature ou dans l'industrie. Les pertes thermiques et les apports énergétiques autres que ceux de l'air humide (rayonnement, contact...) peuvent être pris en compte sous forme de chauffage ou de refroidissement.

Point de rosée

En refroidissant une masse d'air, sa teneur en eau reste constante (isolez par la pensée une masse d'air dans une enveloppe souple). Cette transformation commence donc à Y constant, soit une verticale vers la bas. La pression de vapeur saturante diminue jusqu'à égaler la pression partielle de vapeur de cet air. Il y a alors liquéfaction (le terme condensation devrait être réservé au passage gaz-solide) sur les surfaces froides ou sous forme de gouttelettes (brouillard). La température de rosée est atteinte. Si la masse d'air continue à être refroidie, elle suivra la courbe de saturation. Son humidité absolue baisse. C'est une méthode utilisée pour abaisser la teneur en eau d'une masse d'air. La chaleur qu'il faut extraire par kg d'air sec peut se lire sur le diagramme comme la différence d'enthalpie entre l'état initial et l'état final. Sur le tronçon vertical de la transformation, cette énergie est uniquement de la chaleur sensible. Ensuite, il s'agit essentiellement de chaleur latente (liquéfaction de la vapeur extraite à l'air).

Chauffage

Le chauffage est une opération opposée à celle décrite précédemment. Elle suit donc une verticale vers le haut (Y constant). Il n'y a ici aucune limite et la transformation suivra toujours une verticale ascendante. La teneur en eau absolue de l'air ne varie pas. En revanche, puisque la pression de vapeur saturante augmente avec la température, son humidité relative baisse en réponse à la forte augmentation de P_{vs} avec la température. C'est un moyen d'augmenter le pouvoir évaporatoire de l'air.

Saturation adiabatique

Cette transformation consiste à ajouter à la masse d'air de l'eau liquide à la température T_0 . Son enthalpie spécifique est donc $h_\ell = C_{p\ell}T_0$. la trajectoire sur le diagramme enthalpique est donc définie par une dérivée :

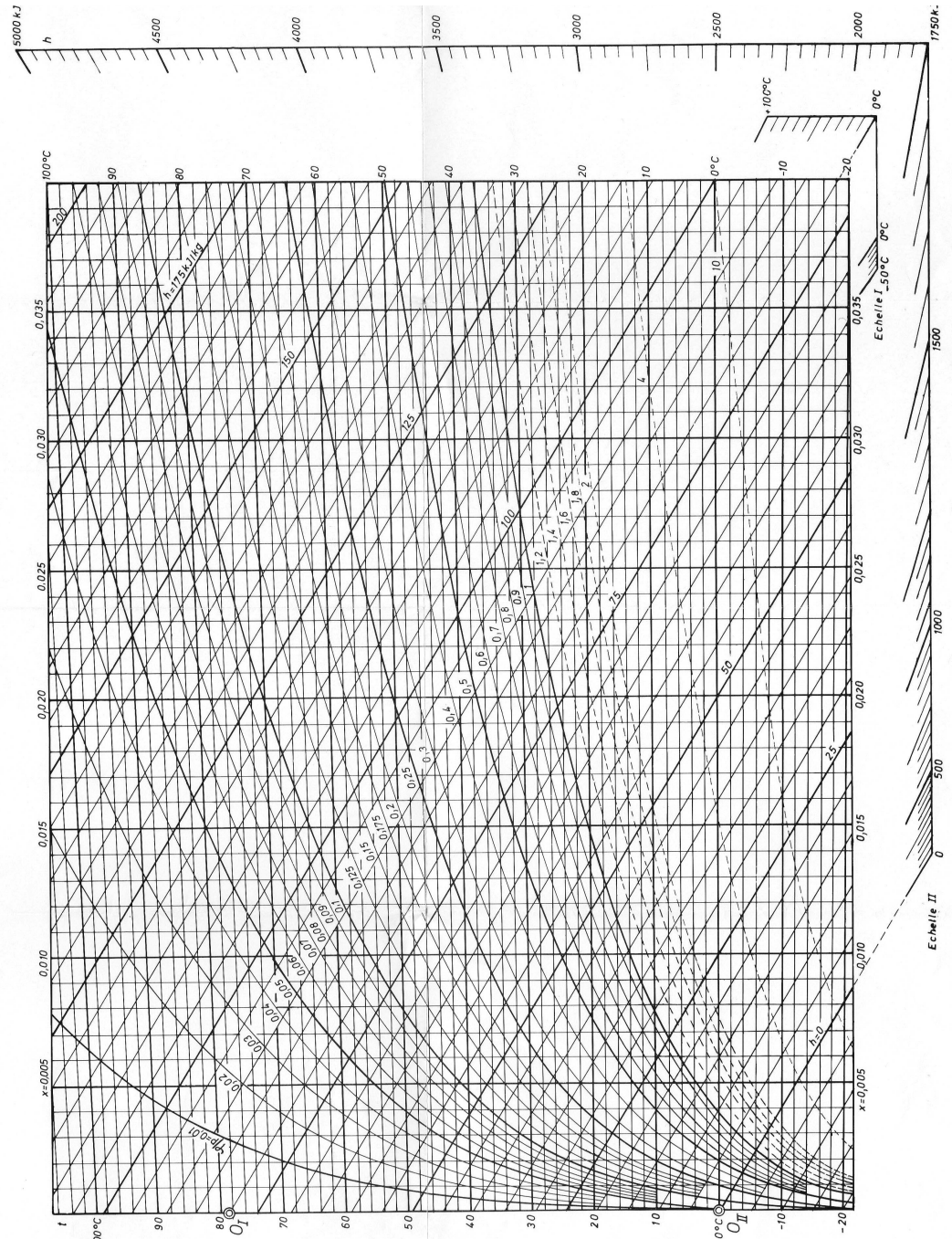
$$\frac{dh}{dY} = h_\ell \quad (21)$$

La relation (21) donne la pente de chaque transformation élémentaire sur le diagramme. Cette pente, qui ne dépend que de la température du liquide ajouté, est constante au cours de la transformation. Le chemin suivi sera donc une droite de direction connue. Par intersection avec la courbe de saturation, il est possible de déterminer la température de

Diagramme (h, x) de l'air humide

Le diagramme représente les relations existant entre les grandeurs suivantes :

- l'humidité absolue x exprimée en $\text{kg H}_2\text{O/kg d'air sec}$,
- l'enthalpie h , en $\text{kJ}[(1+x)\text{kg d'air humide}]$ l'air sec à 0°C ,
- l'humidité relative ϕ par le rapport ϕ/p , où p est la pression en bars,
- la température t , en $^\circ\text{C}$.



Vander, Editeur, Bruxelles

FIGURE 4 – Diagramme enthalpique de l'air humide (tiré de [Houberechts, 1989]).

saturation. L'énergie nécessaire à évaporer une masse d'eau dY à T_0 (température de l'eau) puis à chauffer la vapeur obtenue jusqu'à la température T (température de la masse d'air) est prélevée sur la chaleur sensible de l'air :

$$[C_{pa} + YC_{pv}] dT + [L_v(T_0) + C_{pv}(T - T_0)] dY = 0 \quad (22)$$

Le raisonnement demeure exact si l'eau est ajoutée sous forme gazeuse. Néanmoins, dans ce cas, l'enthalpie de l'eau et la pente associée à la transformation sont beaucoup plus élevées. Il n'y a plus besoin d'évaporer l'eau : si la vapeur est suffisamment chaude, l'ajout d'humidité peut augmenter la température de l'air et la droite ne croisera jamais la courbe de saturation.

Saturation isenthalpique

Un cas particulier de la transformation précédente est obtenu lorsque $T_0 = 0^\circ\text{C}$. Puisque l'enthalpie du liquide est nulle, le chemin suivi sur le diagramme est une isenthalpe :

$$\frac{dh}{dY} = 0, \quad \text{soit} \quad (C_{pa} + YC_{pv})dT + (L_v^0 + C_{pv}T)dY = 0 \quad (23)$$

Mélange de deux masses d'air

Lors du mélange de deux masses d'air, il est plus facile de raisonner à partir de variables extensives (teneur en eau absolue et enthalpie, par exemple). Elles assurent un comportement linéaire. Dans le diagramme (h, Y) , le point représentatif du mélange de deux masses d'air sera donc le barycentre pondéré par les masses des points représentatifs de chacun des constituants du mélange. Renouveler l'air d'un séchoir est un cas typique de mélange de deux masses d'air. Il est souvent utilisé pour abaisser la teneur en eau de l'air d'un séchoir.

1.3 L'eau capillaire

1.3.1 Tension superficielle

En présence d'eau liquide, des interfaces liquide-gaz existent nécessairement. Nous allons voir que des interfaces jouent un rôle déterminant pour les équilibres, puis pour les transferts de liquide. Les molécules d'un liquide interagissent avec d'autres molécules de manière égale de tous les côtés (interactions isotropes). Ainsi, les forces de cohésion entre les molécules à l'intérieur d'un liquide sont partagées avec toutes les molécules voisines. La situation est bien différente pour les molécules qui se trouvent à l'interface. Ces molécules n'ont pas de voisines du côté gaz. Elles subissent ainsi une résultante des forces d'attraction vers le liquide qui produit une certaine instabilité (par comparaison avec l'intérieur) : l'état local à l'interface possède une énergie légèrement supérieure. L'interface a donc une certaine énergie par unité de surface, appelé tension superficielle et généralement notée σ . Pour comprendre son effet sur le comportement de l'interface, on peut imaginer la présence d'un "film" superficiel qui se comporte comme une peau élastique sous tension.

Pour réduire leur énergie, un système avec une interface entre deux fluides évolue spontanément de façon à diminuer la surface de cette interface. C'est pour cela que des

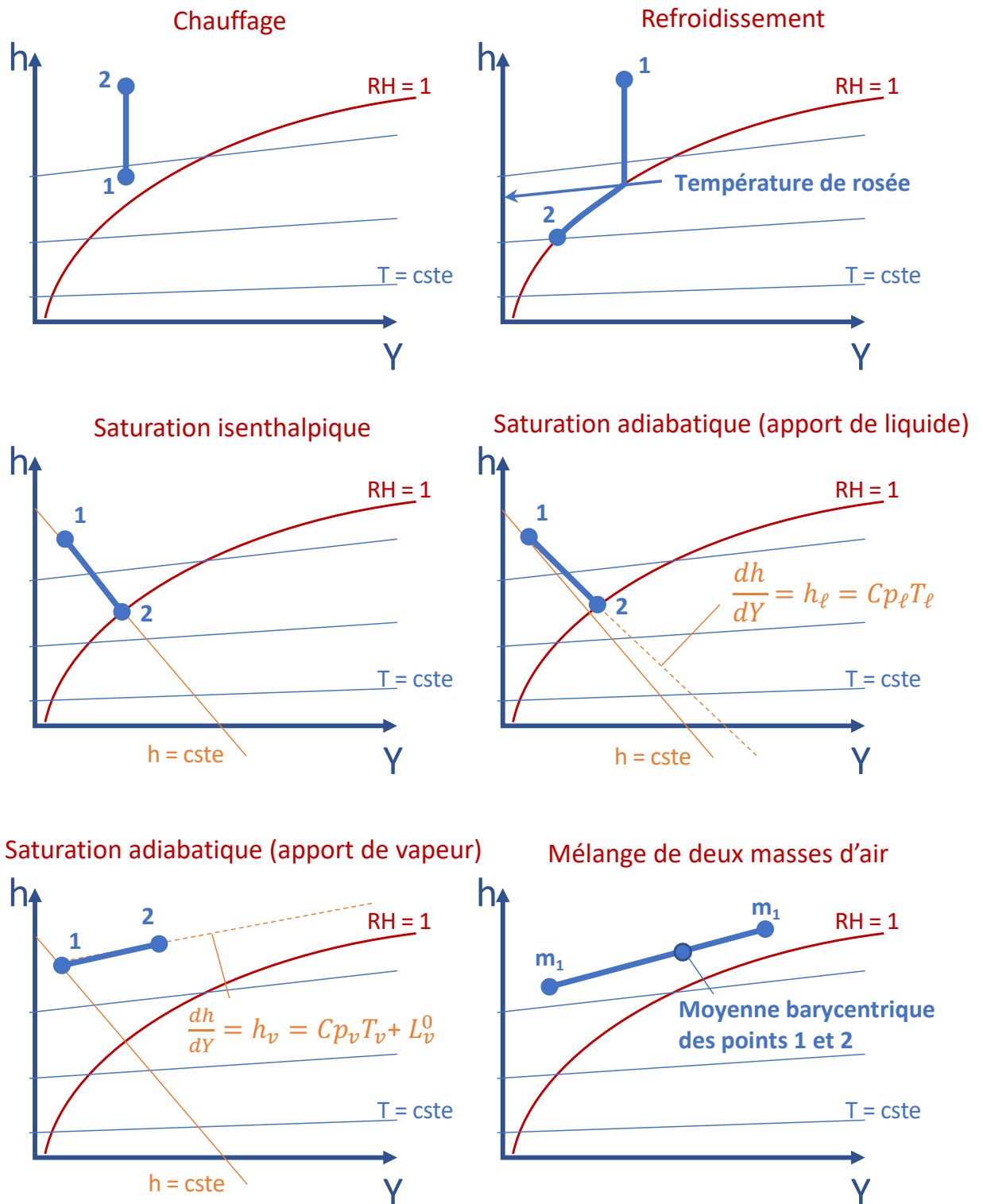


FIGURE 5 – Transformations élémentaires d'une masse d'air dans le diagramme enthalpique de l'air humide.

gouttelettes, pour lesquelles l'énergie potentielle de gravité peut être négligée, ont une forme sphérique. Cela est vrai aussi pour les bulles de Champagne : leur taille est assez petite pour que la gravité et la dynamique de l'écoulement restent négligeables devant la tension superficielle.

La tension superficielle est exprimée en joules par mètre carré (J/m^2) : énergie par surface d'interface. Cette unité est équivalente à des Newtons par mètre (N/m), unité qui donne une autre lecture physique de cette tension : la force exercée dans le plan de l'interface par unité de longueur.

La valeur de cette tension dépend de la nature des deux fluides immiscibles en présence et de la température. L'interface eau/air à 20°C a une tension superficielle de $72,75 \cdot 10^{-3} N/m$ à comparer à la valeur de $22,6 \cdot 10^{-3} N/m$ pour le couple méthanol/air et $472 \cdot 10^{-3} N/m$ pour le couple mercure/air (Atkins, 1994). Pour le couple air/eau, la dépendance en température est pratiquement linéaire entre 0°C et 100°C :

$$\sigma = (76.06 - 0.1676 T) 10^{-3} \text{ N.m}^{-1} \quad (T \text{ in } ^\circ\text{C}) \quad (24)$$

En raison de cette couche en traction, il existe une différence de pression entre les deux fluides dès que l'interface a une courbure. En tout point P de la surface, cet écart de pression peut être exprimé en utilisant la loi de Laplace :

$$\Delta P = \sigma \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \quad (25)$$

R_1 et R_2 sont les deux rayons de courbure principaux de la surface et σ la tension superficielle. Il est intéressant de savoir que la courbure peut aussi être calculée à l'aide de deux rayons de courbure de la surface r_1 et r_2 déterminés avec deux directions orthogonales (direction des plans d'intersection contenant la normale à la surface au point P). Nous pouvons également définir la courbure moyenne de la surface en ce point P , $1/r_m$:

$$\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] = \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] = \frac{2}{r_m} \quad (26)$$

D'après l'équation (26), il est évident que la courbure moyenne d'une sphère de rayon r est simplement $1/r$. Il faut bien sûr garder à l'esprit que les courbures peuvent être positives ou négatives. Au point selle, par exemple, la courbure moyenne est égale à zéro parce que deux rayons de courbure, suivant des directions orthogonales, ont la même amplitude mais des signes opposés. Le même type d'effet opposé existe dans la partie interne d'un tore ou sur la partie externe d'un tube capillaire mis dans l'eau (Fig. 7).

1.3.2 Système à trois phases : deux liquides et un solide

Très souvent (à l'exception du brouillard et des nuages), les deux phases fluides coexistent avec une phase solide. Des tensions superficielles (énergies de surface) peuvent être définies pour chaque interface : gaz-liquide, liquide-solide et solide-gaz. A l'intersection de ces trois surfaces, l'équilibre mécanique ne peut être atteint qu'à une certaine valeur de l'angle (Fig. 6). L'angle peut prendre n'importe quelle valeur entre 0° et 180°. Si elle est inférieure à 90°, la phase liquide est la phase mouillante, si elle est supérieure à 90°, la

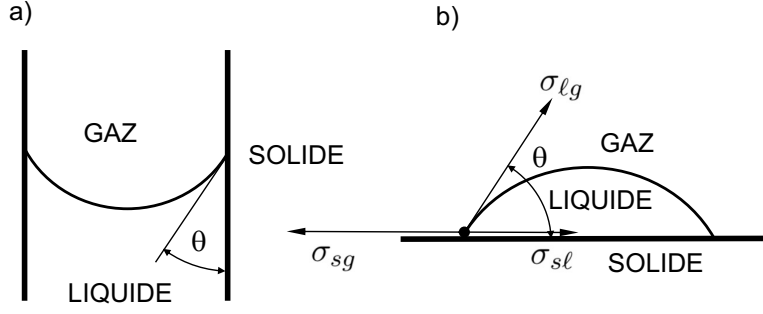


FIGURE 6 – Deux configurations permettant d’observer l’angle de contact θ : a) le ménisque dans un tube capillaire b) une goutte posée, méthode très répandue pour mesurer l’angle de contact.

phase liquide est la phase non mouillante (situation typique avec le mercure). Si l’angle est égal à zéro ($\sigma_{lg} \leq \sigma_{sg} - \sigma_{sl}$), le liquide s’étale spontanément sur la surface du solide.

Plusieurs méthodes ont été mises au point pour mesurer cet angle : la méthode de la plaque basculante, la goutte sessile, la bulle sessile (Dullien, 1992). Cependant, il est important de savoir que cet angle n’a pas de valeur unique : l’angle d’avancée (la valeur mesurée lorsque le liquide remplace l’air) est généralement beaucoup plus grand que l’angle de recul (la valeur mesurée lorsque l’air remplace le liquide). Par conséquent, la détermination expérimentale de l’angle de contact est très difficile et sujette à incertitude. Ce phénomène, appelé hystérésis angulaire, s’explique par la rugosité de la surface ou par des mécanismes physico-chimiques. Elle a des implications importantes sur la pression capillaire dans les milieux poreux.

Dans le cas d’un tube capillaire cylindrique (Fig. 6a), l’équation (25) conduit à :

$$\rho_l g H = \Delta P = \frac{2\sigma \cos \theta}{r} \quad (27)$$

L’équation (27) suppose un capillaire cylindrique. Dans le cas d’un tube conique, l’équation doit être modifiée :

$$\Delta P = \frac{2\sigma \cos(\theta + \phi)}{r} \quad (28)$$

ϕ représente le demi-angle du tube conique.

Dans l’équation (27), r est le rayon du tube capillaire. Dans le cas d’un liquide parfaitement mouillant ($\theta = 0$), le facteur $\cos \theta$ disparaît :

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{r} \quad (29)$$

La pression est toujours la plus faible du côté convexe de l’interface. Par exemple, si la phase liquide est la phase mouillante, la pression du liquide est inférieure à la pression gazeuse dans un tube capillaire. C’est pourquoi le ménisque à l’intérieur d’un tube s’élève au-dessus de la surface (Fig. 7). La hauteur de la remontée capillaire est simplement liée au saut de pression via un résultat classique de statique des fluides :

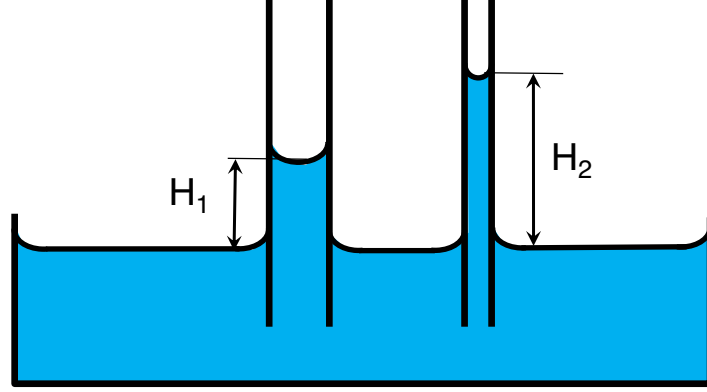


FIGURE 7 – Effet de la taille du tube capillaire sur la hauteur de montée du ménisque.

$$\Delta H = \frac{\Delta P}{\rho \ell g} = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho \ell g} \quad (30)$$

ρ est la densité du liquide ($kg.m^{-3}$) et g l'accélération de la pesanteur ($m.s^{-2}$)

Pour la même raison, la pression est plus élevée du côté concave de l'interface : la pression du liquide à l'intérieur d'une gouttelette est supérieure à la pression de l'air ambiant.

1.3.3 Pression de vapeur à la surface du ménisque

En raison de la courbure de l'interface, il existe un écart de la pression de vapeur saturée. Cet écart peut être calculé à partir de la définition et des propriétés de l'énergie libre de Gibbs : la méthode est similaire à celle utilisée pour dériver l'équation de Clausius-Clapeyron (équation 11), avec une variation de la pression du liquide à pression gazeuse constante :

$$\ln \left[\frac{P_v}{P_{vs}} \right] = -\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{M_v}{\rho \ell RT} \quad (31)$$

P_{vs} est la pression de vapeur saturante (cas d'une interface plane) et P_v est la pression de vapeur d'équilibre à l'interface courbe, R_1 et R_2 sont les deux rayons principaux de la surface et M_v est la masse molaire de la vapeur d'eau. Le tableau 1 prouve que cet effet reste négligeable pour les tubes capillaires dont le rayon est supérieur à $1\mu m$, alors que l'écart de pression est déjà très important. En dessous de $0,1 \mu m$, l'écart par rapport à la pression de vapeur saturante devient significatif. La dernière partie des courbes isothermes de sorption (voir § suivant) observées pour les milieux hygroscopiques s'explique généralement par cet effet.

TABLE 1 – Saut de pression et humidité relative à la surface du ménisque pour différentes valeurs de rayons de tube (valeurs calculées à 20°C, pour un liquide parfaitement mouillant et des tubes cylindriques)

Rayon du capillaire	ΔP	ΔH	P_v/P_{vs}
1 mm	146 Pa	1,49 cm	0,999999
100 μm	1456 Pa	14,9 cm	0,999989
10 μm	14 560 Pa	1,49 m	0,99989
1 μm	1.44 atm	14,9 m	0,9989
0,1 μm	14.4 atm	149 m	0,989
0,01 μm	144 atm	1490 m	0,89

1.4 Equilibre hygroscopique

1.4.1 Isothermes de sorption

Un milieu poreux hygroscopique peut contenir de l'eau dans ses pores, mais aussi de l'eau plus intimement liée au solide. En vertu des valeurs indiquées dans le tableau 1, il est évident que l'effet de la taille des pores sur la pression de vapeur saturante reste le plus souvent négligeable. Du point de vue de l'équilibre de pression de vapeur d'eau, l'eau des pores se comporte comme de l'eau liquide. En dessous d'une certaine valeur qui dépend fortement de la nature de la phase solide du milieu poreux, on commence à observer, en conditions d'équilibre, une relation entre teneur en eau et pression de vapeur. Pour réduire l'effet de la température, on trace en pratique la teneur en eau d'équilibre en fonction de l'humidité relative de l'air.

Dans le domaine hygroscopique, l'eau est liée aux parois cellulaires. Au niveau macroscopique, ce domaine se caractérise par une pression de vapeur d'équilibre inférieure à la pression de vapeur saturante et par une variation des dimensions avec la teneur en eau (domaine du retrait-gonflement). Au niveau microscopique, le premier phénomène s'explique par l'énergie de liaison des molécules d'eau à la matrice solide (liaisons hydrogène ou forces de Van der Waals), et le deuxième par l'encombrement stérique et la réorganisation des liaisons entre les chaînes de molécules en fonction de la présence des molécules d'eau. Il affecte essentiellement la largeur des microfibrilles, d'où le comportement fortement anisotrope du retrait.

Dans ce domaine, il y a équilibre entre la teneur en eau du bois et l'humidité de l'air ambiant. Pour une température donnée, cet équilibre se traduit par une relation entre teneur en eau et humidité relative de l'air. Dans ce cas précis de l'équilibre, cette dernière est parfois appelée activité du produit. La courbe obtenue dépend de la température : il faut donc parler d'un faisceau d'isothermes de sorption (Fig. 8). L'effet de la température est également visible en traçant les isothermes sur le graphe température-humidité relative (Fig. 9). Ce deuxième graphique est d'une lecture plus précise.

Ces isothermes sont semblables pour toutes les essences. Les différences observées peuvent être attribuées à la différence de répartition des principaux constituants (hémicellulose, cellulose, lignine, classées par ordre décroissant d'affinité pour l'eau) mais surtout

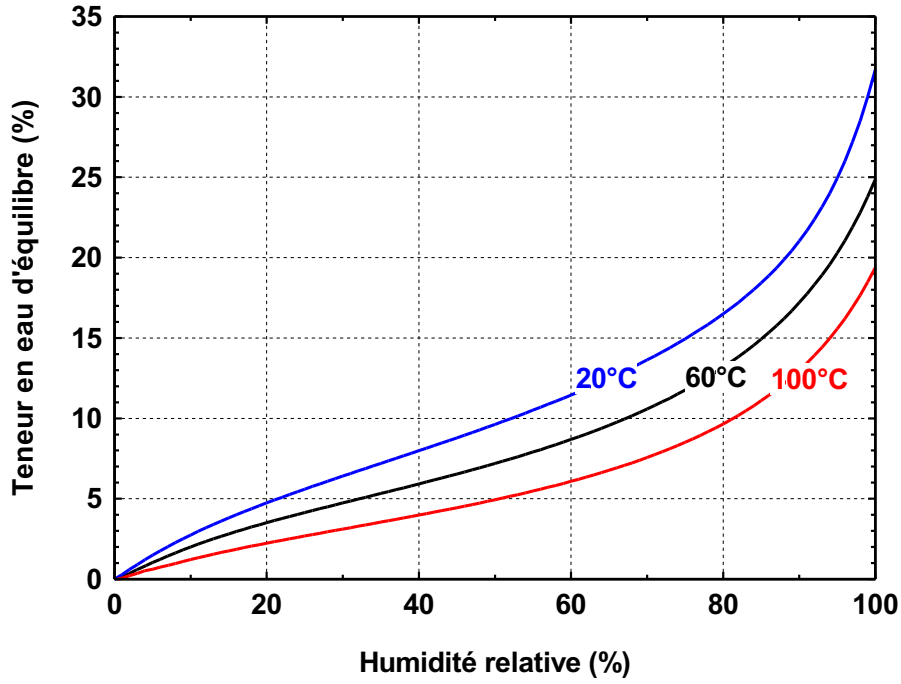


FIGURE 8 – Isothermes de sorption du bois (espèces pauvres en extractibles).

aux résidus ou aux matières volatiles à 103°C qui faussent dans un sens ou dans l'autre la valeur de la masse anhydre. La limite supérieure du domaine hygroscopique ou point de saturation des fibres (PSF) varie selon l'espèce et la température. Cependant, à 20°C, elle est toujours proche de 30%.

1.4.2 Chaleur différentielle de sorption

Les liaisons eau-solide étant supérieures aux liaisons des molécules d'eau entre-elles, l'enthalpie de l'eau liée est inférieure à l'enthalpie de l'eau liquide (il faut plus d'énergie pour l'extraire). La chaleur différentielle de sorption h_s est ce supplément d'énergie qu'il faut fournir à l'eau liée pour l'évaporer. Dans le cas des matériaux lignocellulosiques, elle dépasse légèrement 1000 kJ/kg à l'état anhydre (ce qui est plus élevé que la chaleur latente de fusion) et décroît avec la teneur en eau pour s'annuler au point de saturation des fibres (Fig. 10).

$$h_s = \frac{R}{M_v} \frac{d \left[\ln \frac{P_v}{P_{vs}} \right]}{d \left[\frac{1}{T} \right]} \quad (32)$$

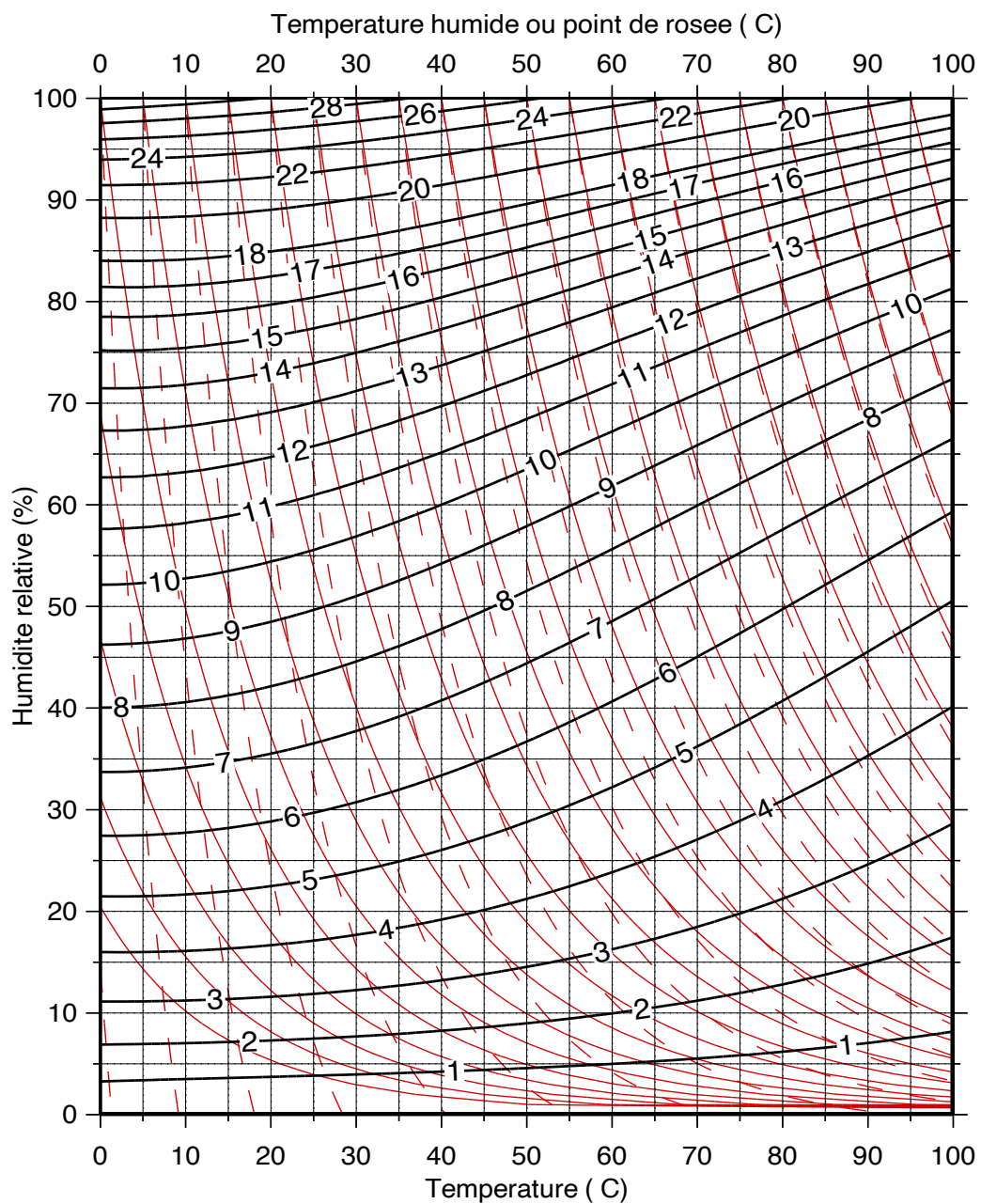


FIGURE 9 – Isothermes de sorption du bois : un graphique plus précis (lignes rouge pointillées = température humide, lignes rouges continues = point de rosée).

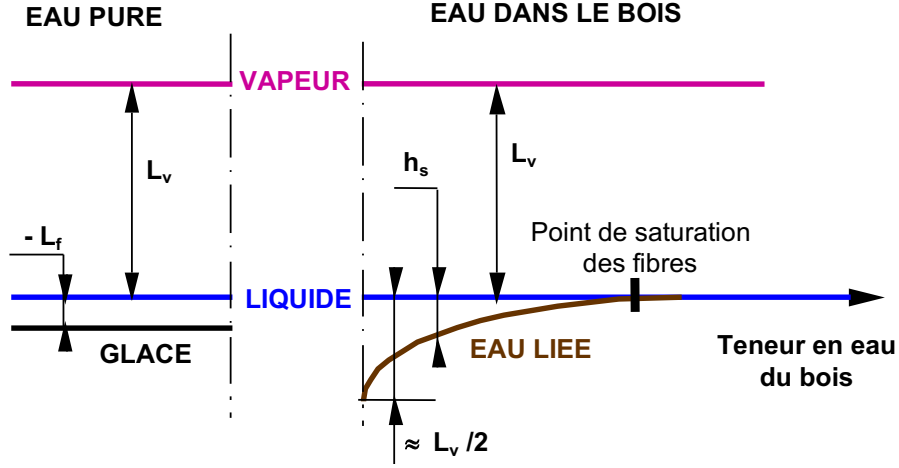


FIGURE 10 – Chaleur différentielle de sorption du bois comparée à la chaleur latente de solidification de l’eau.

2 Configurations hors-équilibre

2.1 Transferts dans un milieu homogène

2.1.1 Conduction thermique (loi de Fourier)

Les trois modes fondamentaux de transfert de chaleur sont la conduction (barreau métallique qui s’échauffe lorsque son extrémité est placée dans une flamme), le rayonnement (le seul possible dans le vide ; transmission de l’énergie solaire) et la convection (chauffage centralisé grâce à la circulation d’eau dans les radiateurs). Le transfert de chaleur par conduction est formulé par la loi de Fourier :

$$\vec{q}_c = -\bar{\bar{\lambda}} \vec{\nabla}(T) \quad (33)$$

$\vec{q}_c$ est le flux de chaleur (W/m^2), $\bar{\bar{\lambda}}$ la conductivité thermique du milieu ($W/m.K$), tenseur d’ordre 2 qui se réduit à un scalaire pour un milieu isotrope et $\vec{\nabla}(T)$ la variation spatiale de la température, responsable du flux de chaleur.

Cette loi exprime donc une proportion entre une force motrice (la variation spatiale de la température) et le flux de chaleur induit par cette force motrice. Le coefficient de proportionnalité n’est autre que la conductivité thermique, propriété intrinsèque du matériau considéré (ordres de grandeur). Le signe moins de l’équation signifie que la chaleur migre du chaud vers le froid : le flux induit par une variation spatiale de température a donc tendance à uniformiser le champ de température.

Les matériaux présentent une très large gamme de valeur de la conductivité thermique (par exemple $400 W.m^{-1}.K^{-1}$ pour le cuivre, $170 W.m^{-1}.K^{-1}$ pour l’aluminium, $\approx 2 W.m^{-1}.K^{-1}$ pour les minéraux, $0,6 W.m^{-1}.K^{-1}$ pour l’eau, $\approx 0,04 W.m^{-1}.K^{-1}$ pour

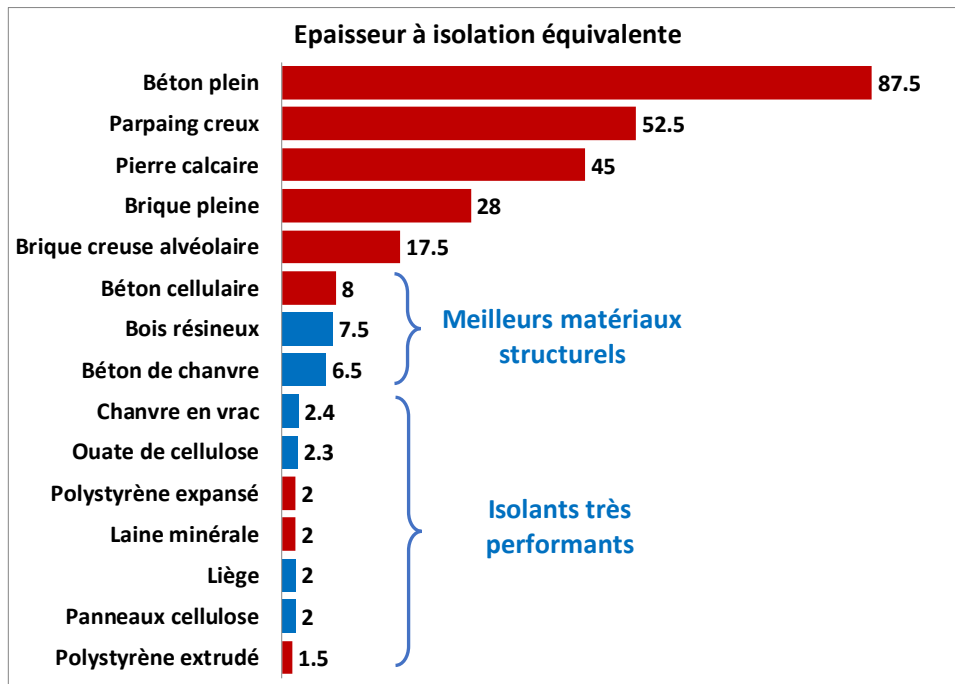


FIGURE 11 – Conductivité thermique de matériaux de construction : épaisseur nécessaire pour obtenir le même pouvoir isolant.

les isolants utilisés dans la construction). La figure 11 présente cette diversité de façon schématique.

Le bois est un milieu hétérogène, constitué d'air, très peu conducteur ($0,023 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) et d'une matrice lignocellulosique dont la conductivité est proche de 1. Contrairement à la diffusion d'humidité, ici c'est le milieu le plus conducteur (la paroi) qui est continu dans ce milieu hétérogène. De ce fait, la conductivité thermique du bois dépend assez peu de la structure anatomique : elle est assez bien reliée à la masse volumique. On peut juste noter une conductivité un peu plus élevée dans la direction longitudinale.

La conductivité thermique du bois varie ainsi de $0,05$ à $0,30 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ en allant du balsa aux bois très lourds. Les bois tempérés courants sont dans la fourchette $0,12$ à $0,15$. Du bois très léger comme le balsa est très proche d'un isolant optimisé (la laine de verre est à $0,04 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$). Une très faible proportion d'une matrice solide (moins de 10% du volume), ayant une conductivité thermique relativement faible, encapsule de l'air sous la forme de petites alvéoles très peu connectées, limitant aussi au maximum les possibilités de transfert par convection de l'air. Le bois fait donc partie des matériaux structurels les plus isolants, juste au-dessus des matériaux purement isolants (Fig. 15).

Attention : ces valeurs s'entendent pour du bois sec. Dans le bois mouillé, une partie de l'air ($0,023 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) est remplacé par de l'eau ($0,6 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) et le bois devient beaucoup plus conducteur.

2.1.2 Transfert de masse (loi de Fick)

Dans un mélange, chaque constituant migre par rapport à l'ensemble dès que sa concentration n'est pas uniforme. Les concentrations de chaque constituant peuvent se référer à la masse ou au nombre de moles. Ces deux possibilités conduiront à des expressions différentes mais équivalentes si l'on est rigoureux dans le développement des expressions obtenues. Ainsi, il ne faudra pas confondre la vitesse barycentrique massique $\vec{v}$ et la vitesse barycentrique molaire $\vec{v}^*$ d'un mélange :

$$\rho \vec{v} = \sum_{i=1}^n \rho_i \vec{v}_i \quad \text{avec} \quad \rho = \sum_{i=1}^n \rho_i \quad (34)$$

$$c \vec{v}^* = \sum_{i=1}^n c_i \vec{v}_i \quad \text{avec} \quad c = \sum_{i=1}^n c_i \quad (35)$$

n est le nombre de constituants du mélange, ρ_i la masse volumique du constituant i (kg/m^3) et c_i la concentration molaire du constituant i ($mole/m^3$).

Pour un mélange binaire (A + B), la première loi de Fick exprime le flux diffusif d'un constituant dans un repère lié à la vitesse barycentrique du mélange. Pour le constituant A, par exemple, les flux molaire et massique s'expriment respectivement par :

$$\vec{j}_A^* = -c D_{AB} \vec{\nabla}(x_A) \quad (36)$$

$\vec{j}_A^* = c_A (\vec{v}_A - \vec{v}^*)$ est le flux molaire de A ($mole.m^{-2}.s^{-1}$) exprimé dans un repère lié à $\vec{v}^*$, D_{AB} le coefficient de diffusion binaire et $\vec{\nabla}(x_A)$ le gradient de la fraction molaire de A ($x_A = c_A/c$).

$$\vec{j}_A = -\rho D_{AB} \vec{\nabla}(\omega_A) \quad (37)$$

$\vec{j}_A = \rho_A (\vec{v}_A - \vec{v})$ est le flux massique de A ($mole.m^{-2}.s^{-1}$) exprimé dans un repère lié à $\vec{v}$, D_{AB} le coefficient de diffusion binaire et $\vec{\nabla}(\omega_A)$ le gradient de la fraction massique de A ($\omega_A = \rho_A/\rho$).

Dans le cas d'un mélange gazeux, le flux total de l'espèce A doit donc s'exprimer comme la somme du flux diffusif, exprimé par rapport à la vitesse barycentrique et du flux convectif, liée à cette vitesse barycentrique. Il faut bien sûr rester cohérent dans le choix des flux diffusif et convectif.

1. Flux total $\vec{q}_A$ massique, exprimé en $kg.m^{-2}.s^{-1}$:

$$\vec{q}_A = \rho_A \vec{v}_A = \rho_A \vec{v} + \vec{j}_A \quad (38)$$

2. Flux total $\vec{q}_A$ molaire, exprimé en $mole.m^{-2}.s^{-1}$:

$$\vec{q}_A^* = c_A \vec{v}^* = c_A \vec{v}_A + \vec{j}_A^* \quad (39)$$

En utilisant la loi des gaz parfait, il est assez facile de démontrer que les deux expressions donnent bien les mêmes flux totaux.

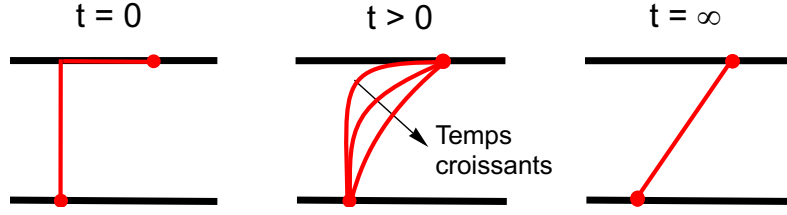


FIGURE 12 – Propagation d’une condition aux limites jusqu’à obtention d’un nouvel équilibre.

2.1.3 Transfert de quantité de mouvement (loi de Newton)

Dans un fluide visqueux, le mouvement se transmet de proche en proche grâce aux frottements ou aux chocs entre les molécules. Ce transport de quantité de mouvement est un phénomène diffusif analogue aux deux précédents. Dans une géométrie tridimensionnelle, le tenseur des taux de déformation est relié au tenseur des contraintes (tenseur d’ordre 2). Le coefficient phénoménologique associé est dans ce cas un tenseur d’ordre 4. Pour un fluide newtonien, l’écriture de la loi de comportement est simplifiée :

$$\bar{\bar{\tau}} = \bar{\bar{\sigma}} - p\bar{\bar{I}} = 2\mu\bar{\bar{\varepsilon}} - \frac{2}{3}\mu\text{trace}(\bar{\bar{\varepsilon}})\bar{\bar{I}} \quad (40)$$

μ est la viscosité dynamique du fluide (kg/m.s).

Pour un écoulement monodirectionnel (selon Ox par exemple), la relation devient beaucoup plus intuitive. Elle est connue sous le nom de loi de Newton :

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy} \quad (41)$$

τ_{xy} est le cisaillement (Pa) qui s’exerce dans la direction Ox sur une face perpendiculaire à Oy.

L’équation (41) indique que la contrainte tangentielle exercée dans le plan normal à la direction Oy est proportionnelle à la variation selon cette normale de la vitesse tangente au plan.

2.1.4 Analogie des phénomènes

Les trois types de transferts décrits ci-dessus sont régis par des lois phénoménologiques analogues : le flux de la grandeur extensive est fonction de la variation spatiale de la force motrice (grandeur intensive associée). Nous nous sommes limités ici aux cas pour lesquels le flux est proportionnel au gradient de la force motrice : il s’agit de relations linéaires. Dans la plupart des cas réels, cette hypothèse est satisfaisante, à condition de se limiter, pour les fluides, aux gaz et à l’eau liquide. En effet, certains fluides réels sont très mal représentés par la loi de Newton (fluides agro-alimentaires, lits fluidisés...). Conformément au deuxième principe de la thermodynamique, la dissipation volumique doit être non négative. Cette condition est garantie par le signe de chaque équation. De façon plus intuitive, ce signe traduit également une évolution spontanée du système vers l’équilibre.

Pour illustrer l'analogie des phénomènes physiques, considérons le cas monodimensionnel de la figure 12. Elle représente la perturbation d'un état d'équilibre initial en changeant brusquement, à $t = 0$, la valeur de la grandeur intensive sur une limite du milieu. La valeur imposée à l'autre extrémité reste égale à la valeur initiale. La perturbation se propage dans le milieu : le profil évolue pour tendre vers le profil d'équilibre qu'est la droite reliant les deux valeurs imposées. Cette description s'applique :

- au transfert de chaleur : le milieu est un solide posé sur un corps massif. Leurs températures sont égales. A $t = 0$, une température différente est imposée sur l'autre face. Les contacts thermiques sont supposés parfaits.
- au transfert de quantité de mouvement : le milieu est un fluide au repos placé entre deux plaques parallèles. A $t = 0$, la plaque supérieure est mise en mouvement, l'autre reste immobile.
- au transfert de masse : un récipient est partiellement rempli d'eau. La pression partielle de vapeur dans la phase gazeuse est égale à la pression de vapeur saturante. En enlevant le couvercle à $t = 0$, la pression de vapeur extérieure est imposée sur le bord supérieur.

Remarque : Dans ce cas, la diffusion induit un mouvement barycentrique moyen qui n'est négligeable que si la fraction de vapeur est faible devant l'unité (voir la correction de Stéfan dans les ouvrages généraux cités en référence).

2.2 Bilan de conservation

En mécanique des milieux continus [Bird et al., 1960, Incropera and DeWitt, 1990], la formulation des phénomènes provient de l'écriture, sur un domaine D quelconque, de la conservation de différentes quantités (matière, énergie, quantité de mouvement...). Le bilan d'une grandeur extensive $\mathcal{A}$ contenue dans un volume D , domaine matériel, s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\underbrace{\iiint_D \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} dV}_{\text{Variation totale}} = \underbrace{- \oint_{\partial D} \alpha dS}_{\text{Flux à travers la surface}} + \underbrace{\iiint_D A dV}_{\text{Production à l'intérieur du domaine}} \quad (42)$$

Dans cette expression, α est la densité de flux et A est la production par unité de volume et par unité de temps de cette grandeur $\mathcal{A}$. Le signe $-$ devant l'intégrale de surface vient de la convention de signe adoptée pour les milieux continus : la normale est orientée vers l'extérieur du volume.

Le tableau 2 donne les valeurs respectives de ces grandeurs pour les trois principales équations de conservation nécessaires à l'établissement des transferts.

2.2.1 Forme locale des équations de conservation

Afin d'obtenir les formes locales des équations de conservation, plusieurs développements sont nécessaires. En particulier, lorsque les grandeurs sont données en coordonnées eulériennes (les valeurs sont données à un instant et en un point s'appliquent aux particules présentes en ce point à cet instant), il faut prendre en considération le mouvement du

TABLE 2 – Valeurs respectives de ces grandeurs pour les trois principales équations de conservation.

Nature du bilan	$\mathcal{A}$	α	A
Masse	Masse volumique ρ	0	0
Constituant i d'un mélange	Masse volumique de ce constituant ρ_i	Densité de flux diffusif $\vec{j}_i \cdot \vec{n}$	taux de production des réactions chimiques r_i
Quantité de mouvement	Quantité de mouvement $\rho \vec{v}$	Vecteur contrainte $\vec{\tau} \cdot \vec{n}$	Forces extérieures volumiques $\rho \vec{f}_i$
Energie	Energie interne + énergie cinétique $\rho e + 1/2 \rho v^2$	Puissance des forces surfaciques + flux de chaleur conductif $(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{v} - (\vec{\lambda} \cdot \vec{\text{grad}} T) \cdot \vec{n}$	Puissance des forces extérieures + source d'énergie volumique $\rho \vec{f} \cdot \vec{v} + \Phi$

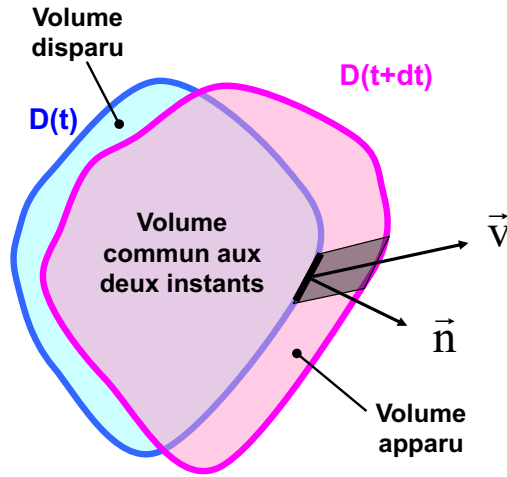


FIGURE 13 – Conservation d'une quantité dans un volume suivant l'écoulement.

volume matériel D au cours du temps (Fig. 13). Les parties qui apparaissent et qui disparaissent au cours du temps sont calculés grâce à la normale extérieur aux facettes et à la valeur de la vitesse en chaque point du contour (associer la figure suivante). Ensuite, les intégrations sur le contour sont transformées en intégration volumique grâce au théorème de flux-divergence. L'intégration sur le volume peut alors simplement être supprimée en se rappelant que l'équation obtenue est vraie quel que soit le volume D considéré. Le détail de ces calculs peut être trouvé dans tous les livres consacrés à la mécanique des milieux continus.

En appliquant ces principes de calcul à chaque grandeur conservée, nous obtenons les formes locales, bien connues, des équations de conservation.

Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (43)$$

Equation de conservation du constituant i d'un mélange :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}_i) = \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} + \vec{j}_i) = 0 \quad (44)$$

Pour rappel, $\vec{j}_i$ est le flux diffusif exprimé par rapport à la vitesse barycentrique massique.

Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \text{div}(\bar{\bar{\sigma}}) + \rho \vec{f} \quad (45)$$

En séparant le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ en un tenseur à trace nulle, le déviateur des contraintes $\bar{\bar{\tau}}$ et un tenseur sphérique $-p\bar{\bar{I}}$, puis en supposant que le fluide est newtonien incompressible, nous obtenons les équations de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}}(p) + \mu \Delta \vec{v} \quad (46)$$

μ est la viscosité dynamique du fluide (Pa.s).

Equation de conservation de l'énergie :

Dans l'équation de l'énergie, la puissance due à la dissipation visqueuse a été négligée et l'enthalpie, plutôt que l'énergie interne, a été utilisée. Il est aussi supposé que l'enthalpie spécifique dépend linéairement de la température. Cette équation est bien adaptée aux phénomènes pour lesquels la pression varie peu. En revanche, elle n'est pas capable de prendre un changement de phase en considération. Bien entendu, l'équation de conservation de l'énergie utilisée en séchage dans le milieu poreux doit tenir compte du changement de phase

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_P \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) = \text{div}(\bar{\bar{\lambda}} \overrightarrow{\text{grad}}(T)) + \Phi \quad (47)$$

2.2.2 Transferts dans la couche limite

Les équations précédentes montrent que la simplicité des transferts couplés dans l'air ambiant n'est que relative. La résolution des champs de vitesse, température et concentration nécessite des traitements numériques fort complexes. Ajoutons simplement que nous n'avons pas parlé de turbulence : dans un écoulement turbulent, en plus de la diffusion moléculaire, les transferts s'effectuent également par mélange de paquets de molécules plus ou moins gros (transport par tourbillons). Pour des applications pratiques, ces problèmes sont globalisés sur la partie de l'écoulement dans laquelle les grandeurs varient fortement. Nous allons limiter l'étude à deux configurations géométriques fréquemment rencontrées en séchage convectif :

- un écoulement dit externe pour lequel l'air arrive avec une vitesse uniforme U_∞ sur une plaque plane parallèle à cette vitesse.
- un écoulement interne dans le canal délimité par deux plaques planes.

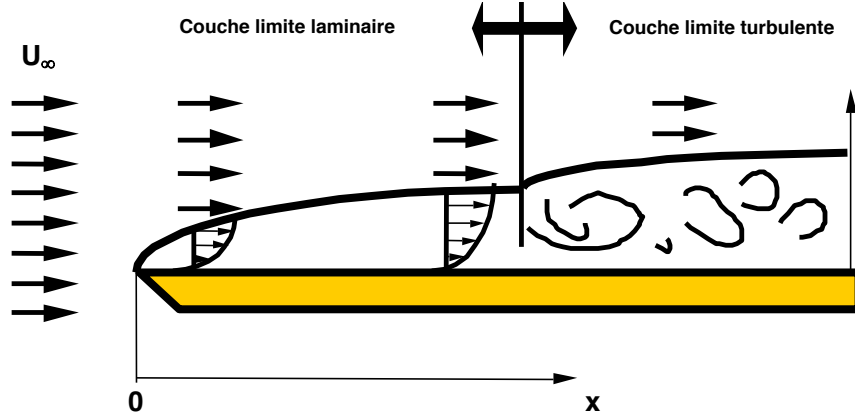


FIGURE 14 – Ecoulement initial uniforme : développement de la couche limite sur une plaque horizontale.

Cette approche globale conduit à la définition de coefficients d'échange (de chaleur et de masse). Ces coefficients d'échange permettent d'exprimer les flux entre le fluide et le milieu poreux à l'aide d'expression linéaires. La force motrice est alors la différence de valeur (température ou concentration) entre la partie non perturbée de l'écoulement et la surface du solide.

Lorsque l'écoulement arrive sur la plaque, du fait de la viscosité du fluide, la vitesse doit s'annuler au voisinage immédiat du solide. Cette condition de vitesse nulle aux parois est à l'origine de toutes les interactions entre le fluide et les structures solides. En conséquence, au bord d'attaque, le gradient de vitesse selon Oy est considérable. Il s'ensuit un transfert de quantité de mouvement très important qui tend à ralentir les couches supérieures. Le profil de vitesse est sensiblement modifié dans une faible épaisseur appelée couche limite. Cette épaisseur, nulle au bord d'attaque, augmente au fur et à mesure que l'on s'enfonce le long de la plaque (Fig. 14).

Dans la couche limite, la vitesse, la température et la concentration de vapeur varient fortement. Grâce à l'adhérence aux parois, le gaz est un milieu continu immobile à l'interface. Les flux échangés entre la plaque et l'air sont donnés par l'application des lois phénoménologiques (Equations 33, 36 et 41) à l'interface gaz-solide (côté gaz) :

- frottement (Pa)

$$\tau = \mu_{gaz} \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0+} \quad (48)$$

- flux de chaleur ($W.m^{-2}.K^{-1}$)

$$q_c = \lambda_{gaz} \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0+} \quad (49)$$

- flux de vapeur diffusif ($mole.m^{-2}.s^{-1}$)

$$j_v^* = c_{gaz} D_v \left. \frac{\partial x_v}{\partial y} \right|_{y=0+} \quad (50)$$

En présence d'un flux massique, la vitesse n'est plus rigoureusement nulle à l'interface

(le milieu poreux est perméable à l'air et à la vapeur). Le flux massique total de vapeur total doit être calculé par l'expression suivante :

$$q_v = M_v [j_v^* + x_v(c_a v_a + c_v v_v)] \quad (51)$$

En règle générale, le flux d'air sec perpendiculaire à la paroi $c_a v_a$ est négligeable devant le flux de vapeur $c_v v_v$, d'où : $q_v \approx \frac{M_v}{1 - x_v} j_v^*$.

Remarque : En exprimant le flux diffusif à partir des fractions massiques, on obtient $q_v \approx \frac{M_v}{1 - \omega_v} j_v$. A titre d'exercice, le lecteur pourra vérifier que les deux expressions sont équivalentes.

Définition des coefficients d'échange

Les équations 48 à 50 sont rigoureuses mais inutilisables : en pratique, les dérivées à la paroi ne sont pas accessibles. Les transferts sont globalisés dans l'épaisseur de la couche limite et les flux sont donnés par le produit d'un coefficient d'échange par l'écart de la force motrice entre la paroi et l'extérieur de la couche limite (milieu non perturbé) :

- Echange de chaleur

$$q_c = h(T_p - T_\infty) \quad (52)$$

h est le coefficient de transfert de chaleur .

- Echange de masse

$$q_v = h_m c M_v (x_{vp} - x_{v\infty}) \quad (53)$$

h_m le coefficient de transfert de masse.

Echange de masse : prise en compte de la vitesse barycentrique

Dans l'équation 53, le flux de masse semble ne dépendre que de la différence de fraction molaire. En fait, lorsque cette fraction molaire se rapproche de l'unité (séchage à haute température par exemple), la partie convective de l'équation 50 devient importante. En intégrant l'équation 53 dans l'épaisseur de la couche limite grâce aux hypothèses de la théorie du film, l'expression du flux total devient :

$$q_v = h_m c M_v \ln \left[\frac{1 - x_{v\infty}}{1 - x_{vp}} \right] \quad (54)$$

En faisant intervenir la moyenne logarithmique de la fraction molaire en air :

$$x_{aml} = \frac{x_{a\infty} - x_{ap}}{\ln(x_{ap}/x_{a\infty})} \quad (55)$$

L'expression précédente s'écrit alors :

$$q_v = h_m \frac{c M_v}{x_{aml}} (x_{vp} - x_{v\infty}) \quad (56)$$

Cette expression est équivalente à l'équation (53) lorsque les fractions molaires de vapeur sont petites devant l'unité. En vapeur pure, $x_{am\ell}$ tend vers zéro ; dans ce cas, la résistance au transfert de masse dans la couche limite devient négligeable. Il est important de savoir que les coefficients de transfert de chaleur et de masse ne varient pas de façon indépendante. L'analogie entre transfert de chaleur et transfert de masse conduit à des relations assez simples entre h et h_m .

2.2.3 Analogie entre transfert de chaleur et transfert de masse

La particularité de l'écoulement de la figure 14 conduit aux approximations classiques de couche limite :

- Couche limite dynamique

$$\begin{aligned} v_x &\gg v_y \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &\gg \frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{aligned} \quad (57)$$

- Couche limite thermique

$$\frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial T}{\partial x} \quad (58)$$

- Couche limite massique

$$\frac{\partial x_v}{\partial y} \gg \frac{\partial x_v}{\partial x} \quad (59)$$

De plus, chaque grandeur peut être normée par une grandeur caractéristique de l'écoulement, et devenir ainsi une grandeur adimensionnelle indiquée par une étoile :

$$x^* = \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad y^* = \frac{y}{L} \quad (60)$$

L est une grandeur caractéristique de l'écoulement (par exemple, la longueur de la plaque)

$$v_x^* = \frac{v_x}{V} \quad \text{et} \quad v_y^* = \frac{v_y}{V} \quad (61)$$

V est une vitesse caractéristique de l'écoulement (pour la plaque, la vitesse U_∞).

La température et la fraction molaire peuvent également être normées :

$$T^* = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} \quad \text{et} \quad x_v^* = \frac{x_v - x_{vp}}{x_{v\infty} - x_{vp}} \quad (62)$$

Avec ces nouvelles approximations, et en supposant que les propriétés physiques du gaz sont constantes (effets de la température et de la concentration molaire négligés), le jeu d'équations adimensionnelles à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*} = 0 \quad (63)$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = 0 \quad (64)$$

$$v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \quad (65)$$

$$v_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L \text{Pr}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (66)$$

$$v_x^* \frac{\partial x_v^*}{\partial x^*} + v_y^* \frac{\partial x_v^*}{\partial y^*} = \frac{1}{\text{Re}_L \text{Sc}} \frac{\partial^2 x_v^*}{\partial y^{*2}} \quad (67)$$

Dans l'écriture adimensionnelle des équations de couche limite, trois groupements adimensionnels sont apparus :

- le nombre de Reynolds, forces d'inertie divisées par les forces visqueuses :

$$\text{Re}_L = \frac{\rho V^2 / L}{\mu V / L^2} = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu} \quad (68)$$

- le nombre de Prandtl, rapport de la diffusivité dynamique sur la diffusivité thermique :

$$\text{Pr} = \frac{\rho C_P \nu}{\lambda} = \frac{\nu}{a} \quad (69)$$

- le nombre de Schmidt, rapport de la diffusivité dynamique sur la diffusivité massique :

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{D_{AB}} \quad (70)$$

Les équations (65 à 67) sont similaires. Cependant, l'analogie est encore plus frappante pour les équations relatives à la température et à la concentration : partant d'un champ de vitesses supposé résolu, la différence entre concentration et température adimensionnelles n'est due qu'au remplacement du nombre de Schmidt par le nombre de Prandtl.

Deux nombres adimensionnels supplémentaires sont introduits pour quantifier les valeurs des coefficients d'échange. Le nombre de Nusselt compare le transfert de chaleur par convection au transfert conductif pur qui serait obtenu avec la longueur caractéristique :

$$\text{Nu} = \frac{h}{\lambda_{gaz}/L} = \frac{hL}{\lambda_{gaz}} \quad (71)$$

Le nombre de Sherwood compare le transfert de masse par convection au transfert diffusif pur qui serait obtenu avec la longueur caractéristique :

$$\text{Sh} = \frac{h_m}{D_{AB}/L} = \frac{h_m L}{D_{AB}} \quad (72)$$

Relation entre les coefficients de transfert de chaleur et de transfert de masse

Puisque dans les équations (66) et (67) le champ de vitesse est le même, les variations de Nu et de Sh sont strictement identiques. L'intérêt de cette analogie est immédiat : toute corrélation obtenue sur le coefficient de transfert de chaleur (le plus "facile" à mesurer) peut être extrapolée au coefficient de transfert de masse, à la seule condition de remplacer Pr par Sc. Une limitation à ce raccourci : les corrélations expérimentales et les calculs analytiques et numériques ne sont de bonnes approximations des variations que pour une plage de valeurs des paramètres Nu ou Sh plus ou moins restreinte. En supposant que le nombre de Nusselt dépend selon la puissance n du nombre de Prandtl, il vient

$$\frac{h}{h_m} = \frac{\lambda_{gaz}}{D_{AB}Le^n} = \rho C_P Le^{1-n} \quad (73)$$

Le est le nombre de Lewis, rapport entre diffusivité thermique et diffusivité massique :

Dans le cas d'un écoulement externe, le terme $\partial p^*/\partial x^*$ disparaît. Si $Pr = Sc = 1$, les équations (65) à (67) sont exactement identiques : c'est l'analogie totale de Reynolds :

$$\frac{f}{2} = \frac{Nu}{Re} = \frac{Sh}{Re} \quad (74)$$

avec

$$\frac{f}{2} (\text{coefficient de frottement}) = \frac{\tau}{\rho V^2} \quad (75)$$

soit

$$\frac{f}{2} = \frac{h}{\rho C_P V} = \frac{h_m}{V} \quad (76)$$

Chilton et Colburn proposent une analogie moins restrictive. Les valeurs de Pr et de Sc apparaissent dans les expressions avec la puissance trouvée lors de la résolution semi-analytique initiée par Blasius de la couche limite laminaire sur une plaque plane. Cette approche est parfois nécessaire, notamment dans le cas du séchage de solvants autres que la vapeur d'eau [Perré, 1994]. Cependant, la diffusion de vapeur d'eau dans l'air est un cas très favorable puisque Le est proche de l'unité. Dans tous les cas, une bonne approximation est obtenue en prenant simplement :

$$\frac{h}{h_m} = \rho C_P \quad (77)$$

Restrictions :

1. L'analogie suppose que les flux sont donnés par les équations (49) et (50). Ceci revient à ne considérer que la partie diffusive pure du transfert de masse. Le flux total devra donc être calculé à partir de (51) lorsque la fraction d'air sec s'éloigne de l'unité (séchage à haute température ou sous vide par exemple).
2. Lorsque le flux de masse est important, la vitesse normale à la paroi ne peut plus être négligée. Les conditions aux limites des équations (65) à (67) sont modifiées (il y a couplage entre les différents modes de transfert). A noter que ceci modifie tous les coefficients d'échange de la même façon : les analogies restent valables, mais les coefficients mesurés en l'absence de transfert de masse ne sont plus utilisables.
3. Toujours lorsque le flux de masse est important, une partie non négligeable de chaleur est nécessaire pour réchauffer à la température ambiante la vapeur qui sort du milieu

à la température de paroi. La correction d'Ackermann permet de tenir compte de cet effet :

$$q_c = h(T_p - T_\infty) \left[\frac{E}{\exp(E) - 1} \right] \quad (78)$$

avec

$$E = \frac{q_v C_{Pg}}{h} \quad (79)$$

En pratique, s'il n'y a pas d'apport énergétique supplémentaire à l'échange convectif (rayonnement, chauffage par contact, source volumique d'origine électromagnétique...), cette correction reste faible en valeur relative.

2.2.4 Corrélations pour deux configurations fréquemment rencontrées

Nous ne présentons ici que les corrélations établies pour deux configurations courantes. Elles ne pourront pas remplacer des mesures précises effectuées sur la configuration réelle mais fourniront des ordres de grandeurs souvent satisfaisants. L'apport éventuel dû au rayonnement (chauffage infra-rouge, capteur solaire, haute température...) n'est pas pris en compte dans le coefficient d'échange obtenu. Suite aux considérations précédentes, seule l'expression donnant le Nusselt thermique est suffisante : le nombre de Sherwood sera obtenu par la même expression, en remplaçant Pr par Sc .

Cas d'un écoulement externe sur une plaque plane

Il s'agit du développement de couche limite tel qu'il est schématisé sur la figure 14. La longueur caractéristique est l'abscisse x mesurée à partir du bord d'attaque. La transition est obtenue pour un nombre de Reynolds critique. Suivant la qualité de la surface et de l'écoulement initial, Re_{xc} varie de 10^5 à $3 \cdot 10^6$.

- pour $Re_x < Re_{xc}$ (écoulement laminaire) :

$$Nu_x = 0,332 Re^{1/2} Pr^{1/3} \quad (80)$$

- pour $Re_x > Re_{xc}$ (écoulement turbulent) :

$$Nu_x = 0,0296 Re^{4/5} Pr^{1/3} \quad (81)$$

Cas de l'écoulement interne

Dans le cas d'un écoulement interne (Fig. 15), la zone non perturbée n'existe pas. Les valeurs de référence utilisées sont des moyennes particulières (les variations de ρ et de c dans la section sont négligées). De nouvelles grandeurs doivent être définies avant de proposer des corrélations utilisables :

- La longueur caractéristique est ici le diamètre hydraulique

$$D = \frac{4S}{P} \quad (82)$$

S et P sont respectivement la surface et le périmètre de la section active. Pour un tube cylindrique, le diamètre hydraulique est égal au diamètre géométrique.

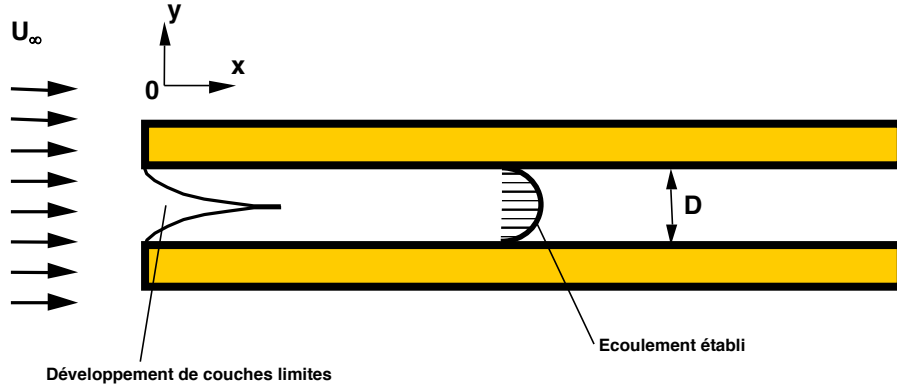


FIGURE 15 – Ecoulement interne ; après établissement de l'écoulement, le profil de vitesse ne dépend plus de l'abscisse.

- La vitesse débitante u_m est la valeur moyenne qui permet d'obtenir le flux massique total q_{tot} en supposant la vitesse constante sur toute la section de passage S :

$$q_{tot} = \int \rho u dS = \rho u_m S \quad (83)$$

- Avec le même principe, la température de mélange T_m est définie à partir du flux énergétique total E_{tot} :

$$E_{tot} = \int \rho u C_V T dS = \rho u_m C_V T_m S \quad (84)$$

- La fraction molaire de mélange x_{vm} est définie à partir du flux total du constituant considéré. En négligeant la diffusion dans le sens de l'écoulement, x_{vm} est donné par :

$$q_{vtot} = \int c u x_v dS = c u_m x_{vm} S \quad (85)$$

Avec ces définitions, le nombre de Reynolds et le flux de chaleur s'écrivent :

$$\text{Re}_D = \frac{\rho u_m}{\mu} \quad (86)$$

$$q_c = h(T_s - T_m) \quad (87)$$

Pour $\text{Re}_D < 2300$, l'écoulement reste laminaire. Au-delà, un écoulement turbulent peut s'établir. Dans la région d'écoulement établi et pour une température de surface imposée (cas rencontré en première phase de séchage) et un tube cylindrique, nous avons :

- pour un écoulement laminaire :

$$\text{Nu}_D = 3,66 \quad (\text{le Nusselt est constant}) \quad (88)$$

- pour un écoulement turbulent :

$$\text{Nu}_D = 0,023 \text{Re}^{4/5} \text{Pr}^{1/3} \quad (89)$$

La deuxième expression suppose le régime turbulent bien développé ($Re_D > 10000$). Des corrélations plus précises mais plus complexes existent [Incropera and DeWitt, 1990].

Pour des sections rectangulaires, le coefficient d'échange varie sur la périphérie (il diminue dans les coins). Le nombre de Nusselt ne caractérise qu'une moyenne du transfert sur la section. L'expression (89) peut être utilisée, à condition de remplacer le diamètre géométrique par le diamètre hydraulique. Pour un écoulement laminaire, la valeur du nombre de Nusselt dépend du rapport longueur sur largeur a/b ($Nu \simeq 3$ pour une section carré, $Nu \simeq 4,5$ pour $a/b = 4$ et $Nu \approx 7,5$ pour $a/b = \infty$).

2.3 Transferts dans un milieu poreux

2.3.1 Introduction

Un milieu poreux est constitué de plusieurs phases : solide, liquide, gazeuse et, éventuellement, eau liée (Fig. 16). Pour chacune de ces phases, les lois décrites précédemment s'appliquent. Cependant, la morphologie d'un milieu poreux est d'une complexité telle que la résolution à l'échelle des pores est impossible. Pour être utilisable, la formulation doit faire intervenir des grandeurs "macroscopiques". Ceci conduit à la définition empirique de lois dont la forme est copiée sur les lois phénoménologiques vérifiées pour les milieux continus. A ce niveau, le milieu poreux est considéré comme étant un milieu fictif supposé continu. En utilisant cette approche, chaque flux est exprimé par le produit d'un coefficient (caractéristique du milieu poreux) par le gradient d'une force motrice (variation spatiale du potentiel qui génère le flux). En écrivant la conservation de différentes grandeurs (liquide, vapeur d'eau, air, enthalpie) nous obtenons le jeu d'équation qui gouverne les transferts de chaleur et de masse dans un milieu poreux. Avant de présenter le jeu complet d'équations macroscopiques, les paragraphes suivants proposent une description physique des différents phénomènes.

Notons toutefois que ces lois empiriques peuvent être retrouvées pour une large part par différentes techniques d'homogénéisation [Whitaker, 1977, Sanchez-Palencia and Zaoui, 1987]. La plus utilisée consiste à intégrer les équations microscopiques sur un volume élémentaire représentatif (VER) entourant le point considéré. Le VER doit remplir la double condition d'être à la fois grand par rapport à la taille des pores et petit par rapport aux variations macroscopiques. En pratique, l'approche "milieu continu" sera utilisable dès que la taille de l'échantillon est nettement plus grande que la taille des pores (Fig. 17). Après la prise de moyenne, le milieu poreux sera assimilé à un milieu continu fictif et toute grandeur physique définie en un point ne sera en réalité que la moyenne de cette grandeur sur le VER. La valeur macroscopique en un point est définie comme étant la moyenne de la grandeur ψ dans le VER centré sur le point géométrique considéré. Deux moyennes sont utilisées :

- La moyenne globale :

$$\bar{\psi} = \frac{1}{V} \int_V \psi dV \quad (90)$$

- La moyenne intrinsèque, limitée à une phase i (cette moyenne permet de donner un sens physique à une grandeur spécifique à une phase) :

$$\bar{\psi}^i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \psi dV \quad (91)$$

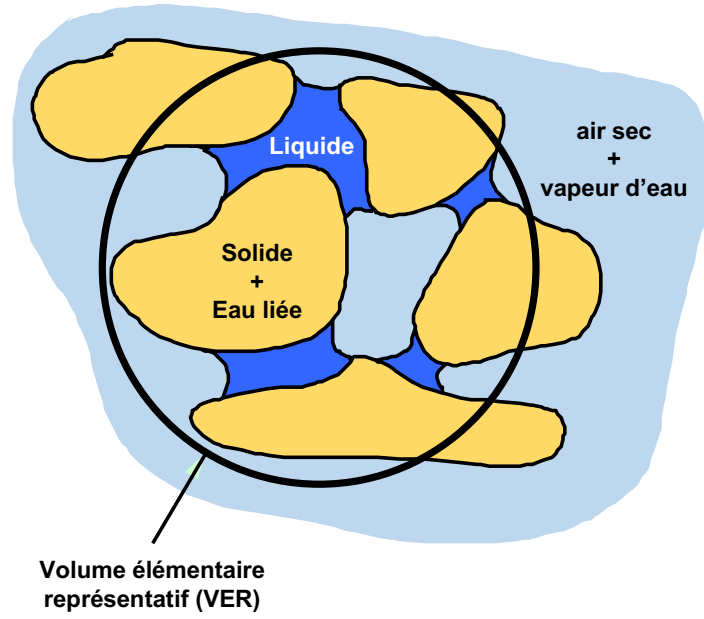


FIGURE 16 – Un milieu poreux est un milieu hétérogène constitué de plusieurs phases. Les grandeurs macroscopiques de ce milieu sont définies par des moyenne sur le Volume Élémentaire Représentatif.

Plusieurs grandeurs macroscopiques peuvent être définies :

La porosité :

$$\pi = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}} \quad (92)$$

La masse volumique :

$$\rho_{app} = \frac{\text{masse anhydre}}{\text{volume total}} \quad (93)$$

La fraction solide :

$$\phi_s = \frac{\text{volume du solide}}{\text{volume total}} \quad (94)$$

Pour quantifier l'eau contenu dans un milieu poreux, on utilise généralement une grandeur équivalente à la teneur en eau (Y) d'une masse d'air. On définit ainsi la teneur en eau du milieu (X) par le rapport de la masse de l'eau qu'il contient ramenée à la masse anhydre. C'est la teneur en eau base sèche (qui assure l'additivité de l'eau) qui ne doit pas être confondue avec la teneur en eau base humide (masse d'eau sur masse totale).

La teneur en eau :

$$X = \frac{\text{masse d'eau}}{\text{masse anhydre}} = \frac{\text{masse totale} - \text{masse anhydre}}{\text{masse anhydre}} \quad (95)$$

C'est une grandeur sans dimension souvent exprimée en pourcentage. Rien n'empêche la teneur en eau de dépasser 100% : un milieu très poreux (béton cellulaire, bois léger)

aura une masse sèche petite et un grand volume de pores, susceptible de contenir une grande masse d'eau.

En présence d'eau, une partie du volume des pores est rempli par du liquide. On peut ainsi définir de nouvelles grandeurs en plus de la teneur en eau.

La fraction liquide :

$$\phi_\ell = \frac{\text{volume du liquide}}{\text{volume total}} \quad (96)$$

La fraction gazeuse :

$$\phi_g = \frac{\text{volume du gaz}}{\text{volume total}} \quad (97)$$

La saturation :

$$S = \frac{\text{volume du liquide}}{\text{volume des pores}} \quad (98)$$

Contrairement à la teneur en eau, la saturation, par définition, varie entre 0 et 1.

Des relations simples existent entre ces grandeurs.

La somme des fraction volumique est égale à 1 :

$$\phi_g + \phi_\ell + \phi_s = 1 \quad (99)$$

La masse volumique apparente est le produit de la masse volumique de la phase solide ρ_s par la fraction volumique de solide :

$$\rho_{app} = \phi_s \times \rho_s = (1 - \pi) \times \rho_s \quad (100)$$

La teneur en eau peut être reliée à la saturation :

$$X = S \times \frac{\pi \rho_\ell}{\phi_s \rho_s} \quad (101)$$

L'équation (101) permet de calculer la teneur en eau maximale du milieu poreux. C'est la teneur en eau obtenue quand tous les pores sont remplis par de l'eau liquide, donc quand $S = 1$.

2.3.2 Perméabilité

La perméabilité à un liquide ou à un gaz traduit sa plus ou moins grande aptitude à se laisser traverser par le fluide (liquide ou gaz) sous l'effet d'un gradient de pression (différence de pression divisée par la longueur traversée, exprimée en Pa/m). Ce phénomène est schématisé sur la figure 18.

Les travaux de Darcy sur les fontaines de Dijon (Darcy, 1856) ont montré que pour de faibles vitesses d'écoulement, il y a proportionnalité entre débit et différence de pression appliquée de part et d'autre du milieu considéré :

$$\frac{QL}{S\Delta P} = \text{constante} \quad (102)$$

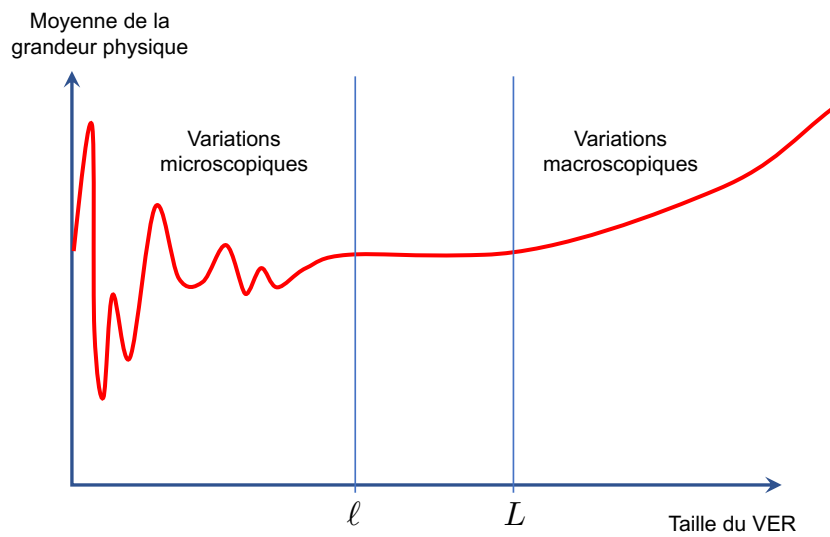


FIGURE 17 – Notion de volume élémentaire représentatif. Son existence est liée à la condition $L > \ell$.

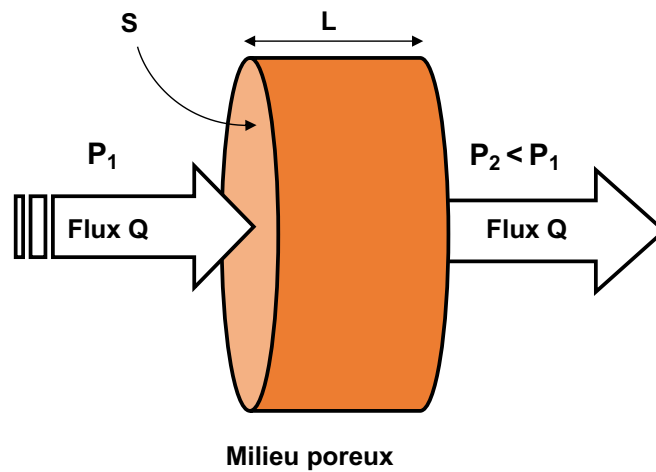


FIGURE 18 – Perméabilité : faculté d'un milieu poreux à laisser passer un fluide en réponse à un gradient de pression.

En fait, l'écoulement dépend à la fois de la viscosité du fluide et de la morphologie du milieu poreux. L'expression actuelle de la loi de Darcy distingue des deux effets, ce qui permet de définir la perméabilité spécifique ou intrinsèque :

$$\vec{u} = -\frac{K}{\mu} \vec{grad} P \quad (103)$$

μ est la viscosité dynamique du fluide ($Pa.s$), $\vec{u}$ la vitesse macroscopique du fluide ($m.s^{-1}$), K la perméabilité spécifique ou intrinsèque du milieu poreux considéré (m^2) et P la pression du fluide (Pa).

Afin de mieux cerner l'effet de la morphologie des pores sur la valeur de la perméabilité K , le milieu poreux peut être représenté schématiquement par un faisceau de tubes de rayon moyen $\langle r \rangle$ placés en parallèle (Fig. 19). La porosité du milieu poreux permet de connaître le nombre de tubes par unité de surface sur la section orthogonale au gradient de pression. On définit également la tortuosité τ comme le rapport au carré entre la longueur du cheminement le long du tube ℓ à la longueur macroscopique le long du gradient de pression L :

$$\tau = \left[\frac{\ell}{L} \right]^2 \quad (104)$$

Pour parvenir à la grandeur perméabilité, nous devons utiliser (ou redémontrer) la formule donnant le débit de fluide dans un tube cylindrique soumis à un gradient de pression en régime laminaire (écoulement de Poiseuille) :

$$Q = \frac{\pi D^4 \Delta P}{128\mu L} \quad (105)$$

Tous calculs faits et par identification, nous obtenons la formule suivante pour la perméabilité intrinsèque de ce milieu modèle :

$$K = \frac{\varepsilon}{\tau} \left(\frac{\langle r \rangle^2}{8} \right) \quad (106)$$

L'équation (106) nous apprend que la perméabilité est proportionnelle à la porosité (qui donne le nombre de tubes par unité de surface) et inversement proportionnelle à la tortuosité (le rapport de longueur intervient au carré car, d'une part, il allonge le parcours et, d'autre part, réduit le gradient de pression sur le parcours). Le rayon moyen $\langle r \rangle$ intervient au carré. En effet, le débit dans un tube est proportionnel au rayon puissance 4 (loi de Poiseuille) mais le nombre de tubes par unité de surface est proportionnel au rayon au carré. Même si cette relation s'applique à un milieu idéal, les termes de l'équation (106) restent valables en pratique. En particulier, l'effet de la taille des pores, qui intervient au carré, donne une tendance bien observée en pratique : la perméabilité décroît fortement quand on passe du gravier ($\approx 10^{-9}m^2$), au sable grossier ($\approx 10^{-12}m^2$), au sable fin ($\approx 10^{-15}m^2$) puis à l'argile ($< 10^{-19}m^2$).

La perméabilité est une grandeur directionnelle : la valeur peut dépendre de la direction selon laquelle la mesure est effectuée. De façon rigoureuse, la perméabilité K de l'équation (103) devrait être un tenseur d'ordre 2, représenté par une matrice dans le repère choisi. Dans le cas du bois, les directions matérielles sont connues et l'on peut parler de perméabilité intrinsèque dans chacune de ces directions. En se rappelant que, dans l'arbre,

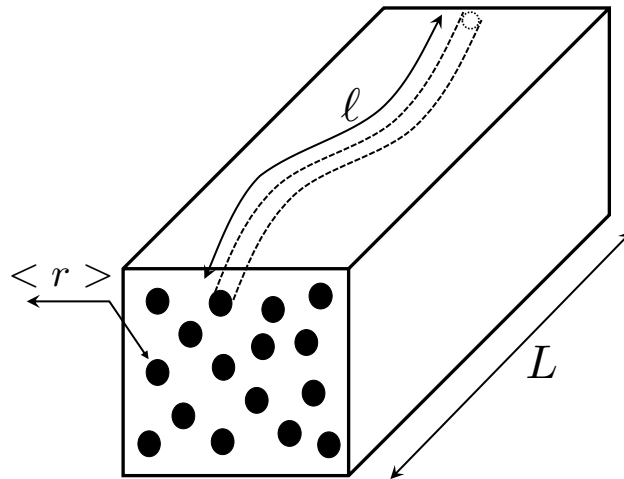


FIGURE 19 – Deux paramètres morphologiques moyens qui expliquent la valeur de la perméabilité d'un milieu poreux à morphologie schématisée.

le bois permet la migration de la sève brute, il n'est pas surprenant de constater que le bois est toujours beaucoup plus perméable dans la direction longitudinale (Tableau 3). Les rapports constatés entre perméabilité axiale et perméabilité dans le plan transverse vont de plusieurs milliers pour les résineux qui n'ont pas d'éléments spécifiques pour le flux de sève à des centaines de milliers, voire des millions pour le feuillus, très efficaces dans la direction axiale grâce à leurs vaisseaux. Les records sont logiquement trouvés chez les feuillus à zone initiale poreuse. Les rapports constatés sont plus faibles dans le duramen, notamment parce que le bois de cœur est généralement beaucoup moins perméable dans la direction axiale. Il faut savoir que de tels rapports d'anisotropie sont exceptionnels en sciences des matériaux. Ils sont tels que l'on peut souffler des bulles dans l'eau à l'extrémité d'une tige de bois à zone initiale poreuse. C'est aussi pour cela que l'eau résiduelle sort aux extrémités des bûches placées dans le feu, quelle que soit leur longueur. Cette particularité permet aussi au séchage sous vide ou au séchage à haute température d'être très efficaces. Enfin, cette forte perméabilité est une voie préférentielle de pénétration de l'eau dans le bois mis en œuvre, tant pour la pluie que pour la remontée capillaire à partir du sol. Les bonnes pratiques de mise en œuvre doivent prendre cela en considération.

Les rapports d'anisotropie élevés s'expliquent aussi parce que le bois est généralement très peu perméable dans le plan transverse. Cela est souvent mis à profit dans l'utilisation traditionnelle du bois : vannes, conduites en bois creusé, bordages de bateaux, réalisation de récipient etc. Ces valeurs mettent aussi en exergue la prouesse de réaliser des tonneaux à partir de chêne, une espèce à zone initiale poreuse : cela n'est possible que dans le duramen, grâce à la tylose qui obture les vaisseaux.

Loi de Darcy généralisée

La perméabilité intrinsèque est définie avec la présence d'une seule phase fluide dans le milieu poreux (pleine saturation). Or, en séchage, deux phases fluides coexistent (une phase gazeuse et une phase liquide). Par extension de la loi de Darcy, le flux volumique de chaque phase fluide sera considéré comme étant proportionnel au gradient de pression de la phase concernée. Les coefficients respectifs sont obtenus en multipliant la perméabilité

TABLE 3 – Ordres de grandeur de perméabilités mesurées sur différentes espèces et selon les 3 directions du bois. Les perméabilités longitudinales sont données pour l’aubier. Une synthèse plus complète est disponibles dans [Perré, 2007].

Catégorie	Perméabilité longitudinale	Rapport d’anisotropie K_L/K_{trans}
Résineux	$10^{-12} - 10^{-14}$	$10^2 - 10^4$
Feuillus à pore diffus	$10^{-11} - 10^{-12}$	$10^3 - 10^5$
Feuillus à zone initiale poreuse	$10^{-10} - 10^{-11}$	$10^4 - 10^6$

intrinsèque K_{sat} par la perméabilité relative à la phase considérée :

Mélange gazeux

$$q_g = -\bar{\rho}_g^g \bar{\mathbf{v}}_g = -\bar{\rho}_g^g \frac{\bar{\bar{K}} \bar{\bar{k}}_{rg}}{\mu_g} \nabla \bar{P}_g^g \quad (107)$$

Liquide

$$q_\ell = -\rho_\ell \bar{\mathbf{v}}_\ell = -\rho_\ell \frac{\bar{\bar{K}} \bar{\bar{k}}_{r\ell}}{\mu_\ell} \nabla P_\ell \quad (108)$$

La pression du liquide est liée à la pression gazeuse par l’intermédiaire de la pression capillaire :

$$P_\ell = \bar{P}_g^g - P_c \quad (109)$$

2.3.3 Diffusion massique

Un milieu poreux hygroscopique est constamment soumis à des changements d’humidité d’équilibre qui induisent des mouvements de vapeur d’eau et d’eau liée en son sein. La diffusivité massique est la propriété qui permet de quantifier la plus ou moins grande faculté de migration de l’humidité dans le milieu poreux. Il faut savoir que cette migration d’humidité à l’échelle des pores est fort complexe : la migration a lieu sous forme de vapeur d’eau dans les pores, selon la loi de diffusion binaire de l’équation (36), mais aussi sous forme d’eau liée dans la phase solide, par sauts successifs d’un site de sorption vers un site proche et disponible. Ceci s’effectue par des cheminements à la fois en série et en parallèle pour lesquels chaque passage entre pores et solide nécessite un changement de phase (évaporation ou condensation). Face à cette complexité, une équation macroscopique, simplifiée mais utile, est souvent adoptée :

$$\vec{q}_v = -\rho_s D_X \overrightarrow{\text{grad}}(X) \quad (110)$$

$\vec{q}_v$ est la densité du flux diffusif ($kg.m^{-2}.s^{-1}$), ρ_s la masse volumique du bois ($kg.m^{-3}$) et D_X la diffusivité associée au gradient de teneur en eau ($m^2.s^{-1}$).

Cette expression est facile à utiliser dans l’équation de conservation de l’eau :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \text{div} \left(D_X \overrightarrow{\text{grad}}(X) \right) \quad (111)$$

TABLE 4 – Ordres de grandeur de diffusivités (D_X) mesurées à 30°C selon les 3 directions du bois [Perré, 2007].

Espèce	Diffusivité longitudinale	Diffusivité radiale	Diffusivité tangentielle
Hêtre	$1,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$2 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$1 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Pin sylvestre	$1,8 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$4,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	$3 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

L’expression (111) a l’avantage d’utiliser un coefficient de diffusion qui utilise la grandeur conservée (le teneur en eau) comme force motrice de la diffusion. Cela permet d’exprimer facilement le temps caractéristique τ nécessaire pour revenir à l’équilibre après une perturbation (changement d’humidité relative de l’air par exemple) lorsque cette perturbation doit se propager d’une épaisseur e :

$$\tau = \frac{e^2}{D_X} \quad (112)$$

Dans le bois, la diffusion est plus facile dans les vides cellulaires que dans la paroi. En conséquence, la diffusivité augmente quand la masse volumique diminue. La forme allongée des cellules est aussi propice à une diffusion plus aisée dans la direction longitudinale. Cette propriété est moins variable d’une espèce à l’autre que la perméabilité. Dans le plan transverse, la masse volumique est un bon indicateur. Des ordres de grandeur de diffusivité sont indiqués dans le tableau 4. En utilisant l’équation (112) dans le cas d’une planche de hêtre de 50 mm débitée sur quartier (diffusion dans la direction tangentielle sur la moitié de l’épaisseur), on trouve un temps caractéristique de $625 \cdot 10^4$ secondes, soit environ 72 jours. Cet ordre de grandeur met bien en exergue les très long temps de diffusion de l’humidité dans le bois. Gardant à l’esprit que ce temps caractéristique varie comme le carrée de l’épaisseur, nous comprenons très facilement qu’il faut débiter les grumes avant de les sécher. Cela explique aussi la recommandation de stocker le bois de chauffage à l’abri durant deux années avant de le brûler. Pour terminer, il est important de préciser que le coefficient de diffusion augmente avec la teneur en eau dans le domaine hygroscopique et est très fortement activé par l’agitation thermique. En séchage industriel, la température de séchage est une façon très efficace de réduire le temps caractéristique de façon très significative.

2.3.4 Migration capillaire

Dans un milieu poreux, l’eau se place de façon à minimiser son énergie. Aussi, l’eau capillaire remplit-elle en priorité les pores de faible rayon. Lors du séchage, le ménisque air-liquide s’incurve à l’endroit où l’eau est enlevée. A cet endroit, la pression du liquide diminue. Ceci donne naissance à un gradient de pression du liquide qui vide les plus gros pores (Fig. 20). Ce phénomène intervient dans de nombreux cas de la vie pratique : imbibition du café dans un morceau de sucre, alimentation en cire de la mèche d’une bougie, remontée d’humidité dans le sol ou dans les fondations d’une maison...

De façon théorique, ce flux capillaire est donné par l’expression (108) dans laquelle la pression liquide est calculée à partir de la pression gazeuse grâce à la relation (109).

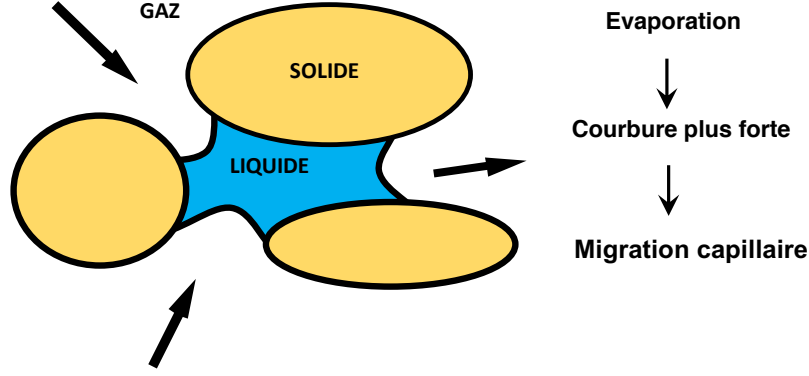


FIGURE 20 – Principe de la migration capillaire : un déséquilibre de la courbure des ménisques provoque une différence de pression liquide capable de déplacer ce liquide si la phase liquide est connectée.

3 Transferts couplés

3.1 La température humide

La température du bulbe humide (en abrégé température humide) est la température observée lorsque la prise de température est entourée d'un milieu très humide et soumise à un flux convectif suffisant (Fig. 21). Elle est plus basse que la température du bulbe sec (ou température sèche, par opposition à température humide). Cette dernière est en fait la température "normale". Nous verrons que cette température humide est un moyen simple de déterminer l'humidité de l'air. Si le flux d'air est suffisant, le couplage dynamique qui s'établit dans la couche limite entre le transfert de chaleur et le transfert de masse est indépendant des propriétés du produit. La température mesurée est constante et uniforme, égale donc à la température humide T_h : il n'y a donc pas d'échange d'énergie entre l'interface et le corps humide. Le flux de chaleur sert uniquement à l'évaporation de l'eau qui quitte le matériau :

$$q_c = L_v q_v \quad (113)$$

En exprimant les flux de masse et de chaleur avec les coefficients d'échange à l'interface et en notant x_{vp} la fraction molaire de vapeur à l'interface (qui est donc la fraction molaire de vapeur saturante à la température T_h), nous obtenons :

$$h(T_h - T_\infty) = -L_v h_m c M_v (x_{vh} - x_{v\infty}) \quad (114)$$

L'écart des températures est proportionnel à l'écart des fractions molaires :

$$\frac{T_h - T_\infty}{x_{vh} - x_{v\infty}} = -\frac{h_m}{h} L_v c M_v \quad (115)$$

En utilisant la relation qui vient de l'analogie entre transfert de chaleur et transfert de masse, nous obtenons :

$$\frac{T_h - T_\infty}{x_{vh} - x_{v\infty}} = -\frac{L_v M_v}{C_p M} \quad (116)$$

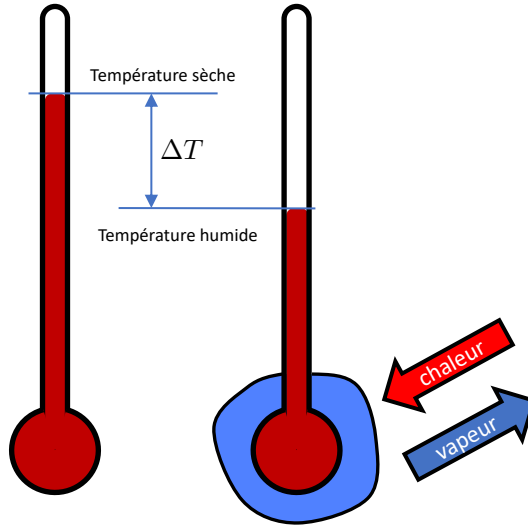


FIGURE 21 – La notion de température humide : transferts couplés de chaleur et de vapeur autour du bulbe saturé en eau. Le même équilibre dynamique de transferts couplés existe avec une surface quelconque soumise à un flux d'air convectif si la présence d'eau liquide à la surface impose la pression de vapeur saturante.

Si l'on néglige les variations de la masse molaire M dans la couche limite, l'équation précédente peut s'écrire en fonction des fractions massiques :

$$\frac{T_h - T_\infty}{\omega_{vh} - \omega_{v\infty}} = -\frac{L_v}{C_p} = -\frac{L_v^0 - (C_{pl} - C_{pv})T_h}{C_p} \quad (117)$$

avec $\rho C_p = \rho_a C_{pa} + \rho_v C_{pv}$

Après développement, et lorsque $\omega_v \ll 1$, il vient :

$$C_{pa}T_\infty + Y_\infty(C_{pv}T_\infty + L_v^0) - C_{pa}T_h - Y_h(C_{pv}T_h + L_v^0) = -(Y_h - Y_\infty)C_{pl}T_h \quad (118)$$

Soit :

$$\frac{\Delta h}{\Delta Y} = C_{pl}T_h \quad (119)$$

Cette relation permet de trouver la température humide sur le diagramme enthalpique. La pente est donnée par l'échelle périphérique du graphique. Pour les températures habituelles, la pente diffère peu des isenthalpes. En pratique, la température humide peut être approchée en prolongeant le point représentatif de la masse d'air jusqu'à la courbe de saturation à enthalpie constante (Fig. 21).

Il est assez facile de mesurer cette température humide : il suffit d'avoir un thermomètre et d'assurer que le bulbe soit saturé en eau. Pour cela, on peut simplement prendre un morceau de coton saturé d'eau, ou, pour obtenir une mesure sur une longue période,

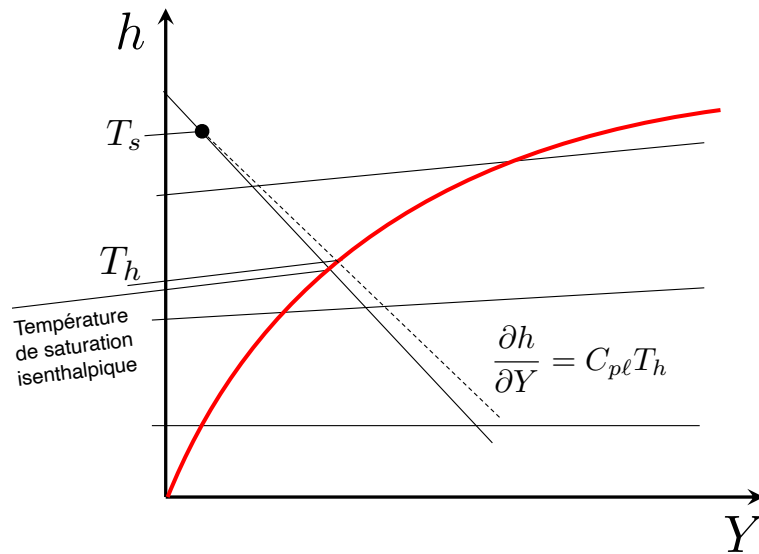


FIGURE 22 – La température humide est proche de la température de saturation isenthalpique

une mèche de coton humidifiée par migration capillaire depuis un réservoir d'eau. Cette méthode est une méthode traditionnelle, appelée psychrométrie, pour déterminer l'humidité relative de l'air. En effet, en connaissant le température humide et la température sèche, on peut positionner le point représentatif de la masse d'air sur le diagramme de l'air humide, puis lire son humidité relative. Pour plus de précision, il existe des tables psychrométriques qui donnent l'humidité relative en fonction de la température sèche et de la différence $(T_s - T_h)$.

3.2 Description du séchage convectif

Cette configuration représente une part appréciable des procédés industriels, surtout utilisée pour des produits solides relativement fragiles (produits alimentaires, bois...). Dans une telle situation, le rôle de la pression gazeuse interne est négligeable. Deux phases distinctes doivent être analysées.

3.2.1 Phase de séchage à vitesse constante (Première phase de séchage)

Pendant cette période, de l'eau libre est présente à la surface du produit. En conséquence, la pression de vapeur à la surface du produit est égale à la pression de vapeur saturante et n'est donc fonction que de la température. Des flux croisés de masse et de chaleur existent dans la couche limite. Le flux de chaleur est intégralement utilisé pour transformer le liquide en vapeur. Pendant cette période, le taux de séchage est constant, il ne dépend que des conditions externes (température et humidité de l'air, vitesse et caractéristiques de l'écoulement). La température de surface est égale à la température humide de l'air. Par ailleurs, puisque qu'aucun transfert d'énergie lié au changement de phase n'a lieu dans le milieu durant cette période, tout le milieu s'équilibre à la température humide.

La surface d'échange est alimentée en eau par l'action des forces capillaires (le phé-

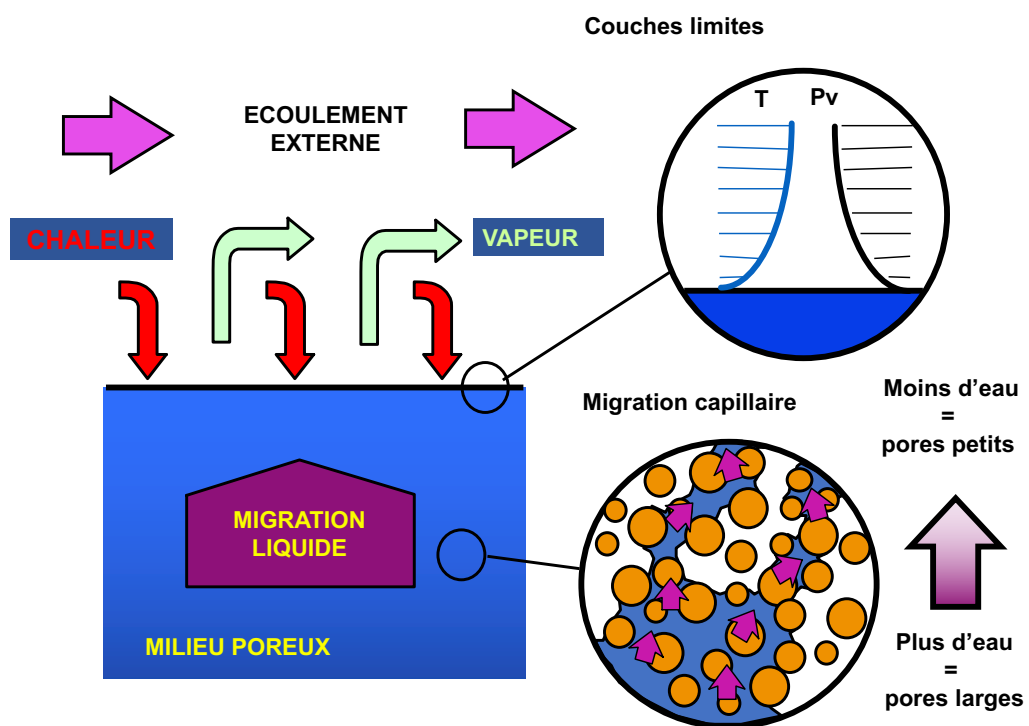


FIGURE 23 – Configuration schématique durant la première phase de séchage. (tiré de [Perré, 2007]).

nomène qui permet au café de défier la gravité pour envahir un morceau de sucre et à la mèche de la bougie d'être alimentée en combustible liquide). En fait, dans un milieu poreux partiellement saturé, le liquide et la gaz coexistent, d'où la présence d'interfaces liquide-gaz. L'angle de contact entre cette interface et le solide, déterminé par la nature des constituants, courbe la surface. En raison de la tension superficielle de l'interface, la pression du fluide mouillant (ici, l'eau) est plus faible que celle du fluide non mouillant (l'air). La pression capillaire n'est autre que cette différence de pression. Bien entendu, la courbure de la surface dépend de la taille de pores : elle augmente lorsque la teneur en eau diminue. C'est la raison pour laquelle le flux liquide est dirigé des zones humides vers les zones sèches. Ce phénomène de migration capillaire est le principal mode de migration du liquide pour des conditions de séchage modérées. La première phase de séchage dure tant que la surface du produit est alimentée en eau libre. Ceci dépend fortement des conditions de séchage externes (température et humidité de l'air, vitesse et caractéristiques de l'écoulement), des conditions initiales (température et humidité du produit) et des propriétés et de la géométrie du produit à sécher. D'ailleurs, l'existence de cette période n'est pas systématique. Le flux liquide s'exprime par la loi de Darcy (flux = perméabilité $\times$ gradient de pression liquide). Lorsque la teneur en eau diminue, les forces capillaires ont tendance à augmenter, mais la perméabilité relative à la phase liquide diminue. Au total, le flux liquide tend à diminuer pour un même gradient de teneur en eau. En conséquence, le profil de teneur en eau devient de plus en plus relevé à mesure que le séchage progresse. Le liquide finit par disparaître de la surface du produit : ceci marque la fin de la première phase de séchage.

3.2.2 La phase de séchage à vitesse décroissante

Lorsque la surface du produit atteint le domaine hygroscopique, la pression de vapeur devient inférieure à la pression de vapeur saturante. En conséquence, le flux de vapeur externe est réduit et la quantité de chaleur fournie au produit est temporairement supérieure aux besoins nécessaires au changement de phase. L'énergie en excès chauffe le solide, d'abord en surface, puis, grâce à la conduction thermique, au cœur du produit. Un équilibre dynamique, plus subtil, s'établit en transfert de chaleur et transfert de masse. La pression de vapeur en surface dépend à la fois de la température et de la teneur en eau en surface. Ainsi, la température de surface augmente à mesure que la teneur en eau en surface diminue, de façon à satisfaire le bilan d'enthalpie. Cette évolution explique pourquoi la vitesse de séchage décroît durant cette période. Deux zones se distinguent alors dans le milieu poreux : une zone interne dans laquelle la migration liquide, la plus efficace, est le mécanisme dominant et une zone périphérique, plus sèche, dans laquelle seule la diffusion de vapeur et/ou d'eau liée est possible. Durant cette période, un flux thermique doit exister dans le milieu de façon à chauffer le milieu et à apporter l'énergie à l'endroit où le liquide est évaporé. Bien entendu, la région de migration liquide s'amenuise et finit par disparaître. Le séchage est terminé quand la température atteint la température sèche de l'écoulement et que la teneur en eau est partout égale à la teneur en eau d'équilibre du produit.

3.2.3 Séchage avec vaporisation interne

Afin de réduire le temps de séchage sans nuire à la qualité du produit séché, les conditions de séchage doivent être telles que la température du produit soit au-dessus du point d'ébullition de l'eau. Lorsque cette condition est remplie, une surpression interne existe.

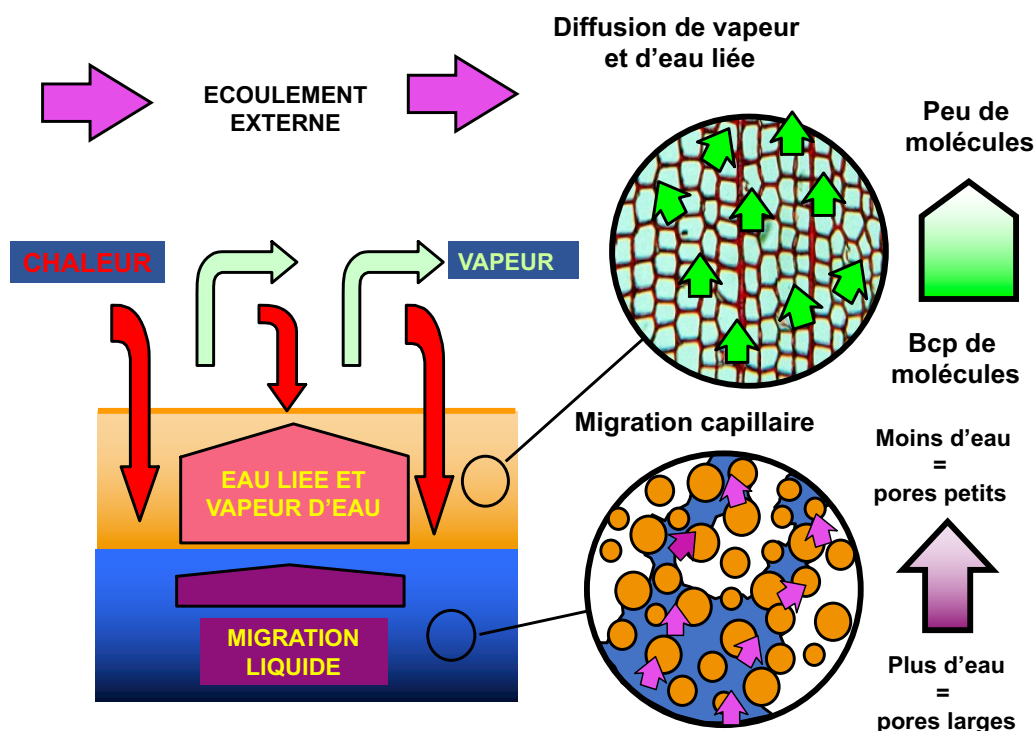


FIGURE 24 – Configuration schématique durant la phase de séchage à vitesse décroissante. (tiré de [Perré, 2007]).

Ceci constitue une force motrice supplémentaire capable de conduire l'humidité (sous forme liquide et/ou gazeuse) à la surface du produit. En effet, le gradient de pression gazeuse agit aussi sur la pression liquide (équation (109)). Un gradient de pression gazeuse est donc une force motrice à la fois pour la vitesse du gaz et celle du liquide, via la loi de Darcy généralisée (équations 107 et 108).

A la pression atmosphérique, l'eau bout à 100°C. En conséquence, pour être sûr d'obtenir une surpression interne, il faut que la température du produit dépasse ce niveau de température. C'est exactement l'objectif recherché dans le séchage convectif à haute température (le fluide asséchant peut être de la vapeur surchauffée ou de l'air humide). Le séchage par contact et le chauffage interne par des ondes électromagnétiques (micro-ondes ou hautes fréquences) permettent aussi d'obtenir cette condition. Cependant, il est également possible d'abaisser le point d'ébullition en travaillant à pression réduite (Fig. 25). C'est le principe du séchage sous-vide. Son principal intérêt est d'obtenir une configuration "haute température" tout en gardant des conditions de séchage modérées. Ce procédé est particulièrement bien adapté aux produits thermo-sensibles (produits pharmaceutiques, denrées alimentaires, bois feuillus...).

3.3 Analyse du séchage convectif

Nous devons à Krischer and Kröll [1956], l'analyse de la cinétique en trois phases de séchage :

La première phase, à vitesse constante : cette phase débute après la période transitoire de

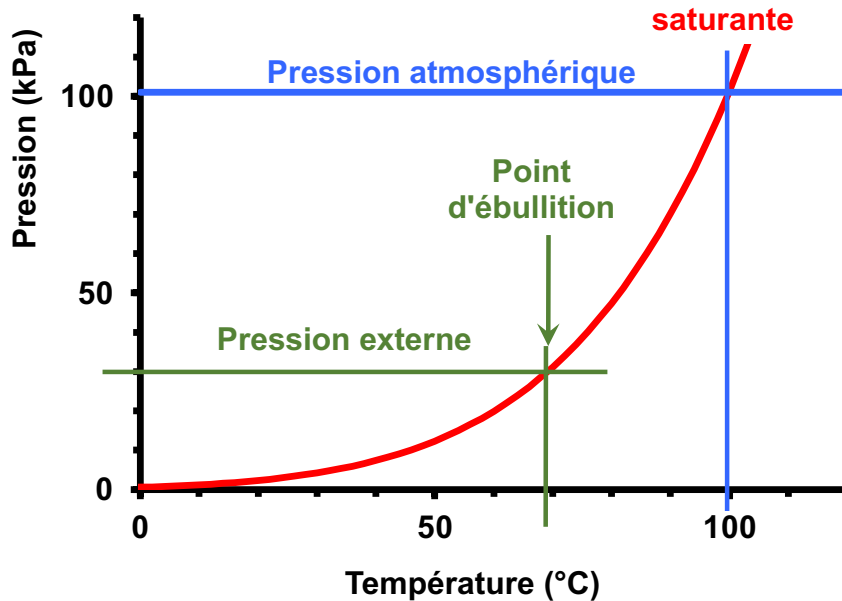


FIGURE 25 – Le séchage sous vide est l’une des techniques qui permet d’obtenir une configuration ”haute température” avec des conditions de séchage modérées.

mise en régime thermique. Elle est marquée par une évolution linéaire de la masse en fonction du temps. Elle dure tant que la surface du produit est alimentée en eau libre par succion capillaire ou par effet de la pression gazeuse interne. Durant cette phase, la vitesse ne dépend que des conditions aérothermiques de l’écoulement et la température du produit s’équilibre à la température humide de l’air.

La deuxième phase de séchage : elle débute lorsque la surface du produit entre dans le domaine hygroscopique. Il s’agit d’une phase à vitesse de séchage décroissante. La température du produit augmente, en commençant par la surface, et se rapproche de la température sèche de l’écoulement.

La troisième phase de séchage : elle débute lorsque tout le milieu poreux est dans le domaine hygroscopique. La vitesse de séchage marque une nouvelle chute pour tendre vers zéro. La température s’équilibre à la température sèche et l’humidité du milieu à l’humidité d’équilibre déterminée par l’isotherme de sorption : le séchage est terminé.

Remarques sur la cinétique de séchage

1. Dériver une cinétique de séchage est une opération délicate car elle accentue terriblement le bruit expérimental. Pour obtenir de bons résultats, la vitesse de séchage doit être calculée à partir d’une pesée en continu après lissage des points expérimentaux. Une pratique qui a fait ses preuves consiste à chercher par la méthode des moindres carrés la pente moyenne d’une fenêtre de n points qui se déplace le long de la courbe.
2. La première phase de séchage n’existe pas si la surface du produit atteint le domaine hygroscopique avant la fin de la période de transition (teneur en eau initiale trop faible et/ou séchage trop violent).

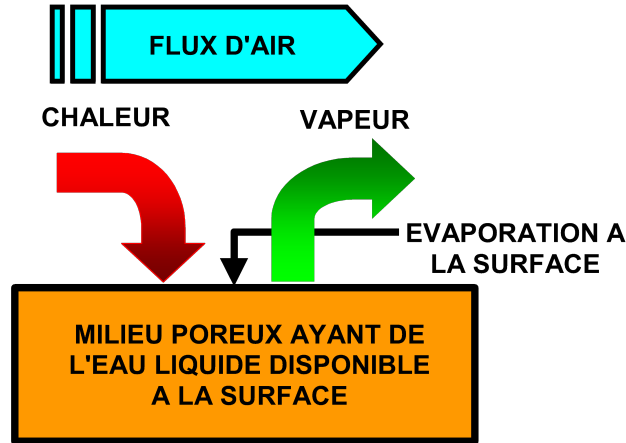


FIGURE 26 – Surface saturée en eau soumise à un flux d’air : établissement d’un équilibre dynamique avec flux croisés de chaleur et de vapeur.

3. La distinction entre les 2^{ème} et 3^{ème} phases de séchage est souvent délicate et inutile sur des courbes expérimentales :
 - (a) Pour des milieux fortement hygroscopiques tel que le bois, ces phases sont difficiles à distinguer dans la pratique : on ne distinguera sur la cinétique, qu’une phase de séchage à vitesse décroissante. Cependant, d’autres paramètres tels que des valeurs locales de température et pression peuvent permettre de discerner ces périodes.
 - (b) Pour des milieux non hygroscopiques (sable par exemple), un front d’évaporation se propage dans le milieu dès la fin de la 1^{ère} phase de séchage. Le milieu est sec entre la surface et le front (avec diffusion gazeuse) tandis qu’il reste de l’eau libre entre le front et le centre du milieu. La 2^{ème} phase (selon sa définition par Krischer) se termine lorsque le front d’évaporation atteint le plan de symétrie. Mais à cet instant, le séchage est terminé : la 3^{ème} phase n’existe donc pas et le séchage se termine avec une vitesse de séchage non nulle (Fig. 29).

3.3.1 La première phase de séchage

Nous avons vu que la première phase de séchage existe lorsque la surface du produit reste au-dessus du domaine hygroscopique. Dans ces conditions, le couplage qui s’établit dans la couche limite entre le transfert de chaleur et le transfert de masse est indépendant des propriétés du produit. Sa température est constante et uniforme, égale à la température humide T_h : il n’y a donc pas d’échange d’énergie entre l’interface et le milieu poreux. Le flux de chaleur sert uniquement à l’évaporation de l’eau qui quitte le matériau. Les équations sont donc identiques à l’analyse de la température humide :

$$q_c = L_v q_v \quad (120)$$

Une autre interprétation de la conséquence de cet équilibre dynamique peut être tirée de l’équation (117), reprise ici pour simplifier la lecture :

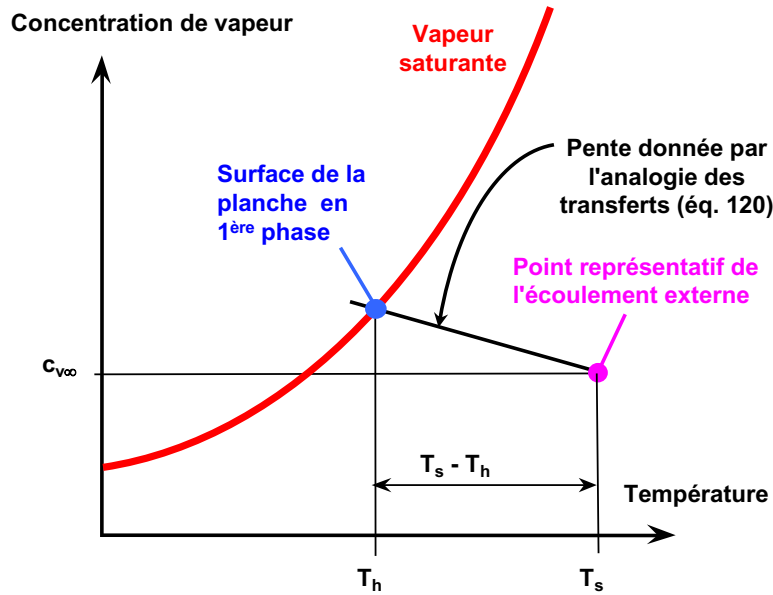


FIGURE 27 – Détermination graphique de la vitesse de séchage en première phase (d’après [Perré, 2007]).

$$\frac{T_h - T_\infty}{\omega_{vh} - \omega_{v\infty}} = -\frac{L_v}{C_p} \quad (121)$$

Cette relation donne la pente qu’il faut utiliser dans le graphique concentration de vapeur - température pour déterminer la température d’équilibre de la surface en première phase (Fig. 27). L’intersection de cette droite avec la courbe de saturation donne le point représentatif du produit, donc la température humide. En choisissant le point représentatif de l’écoulement dans le plan température-concentration de vapeur, on définit à loisir la différence de températures $T_s - T_h$. La vitesse de première phase ne dépend plus que du coefficient d’échange, lui-même défini par la vitesse d’écoulement.

La fin de la première phase de séchage correspond à l’entrée de la surface du produit dans le domaine hygroscopique. La durée de cette période dépend fortement du produit (teneur en eau initiale, faculté de migration liquide, épaisseur) et des conditions aérothermiques (vitesse de l’air, températures sèche et humide). La première phase sera beaucoup plus courte (voire inexistante) pour un produit épais et peu humide soumis à un flux d’air très sec que pour un produit fin et très humide soumis à un flux d’air chaud et humide. La phase de séchage à vitesse décroissante débute ainsi lorsque la surface du produit quitte la courbe de pression de vapeur saturante. Durant cette phase, la vitesse de séchage diminue jusqu’à s’annuler lorsque le produit est à l’équilibre. Cette phase de séchage fait intervenir le couplage entre tous les phénomènes décrits précédemment.

Les figures 28 et 29 montrent les allures typiques de la cinétique de séchage (évolution de la teneur en eau en fonction du temps) et de la vitesse de séchage, tracée en fonction de la teneur en eau. Ces courbes schématisent l’existence d’une phase de séchage

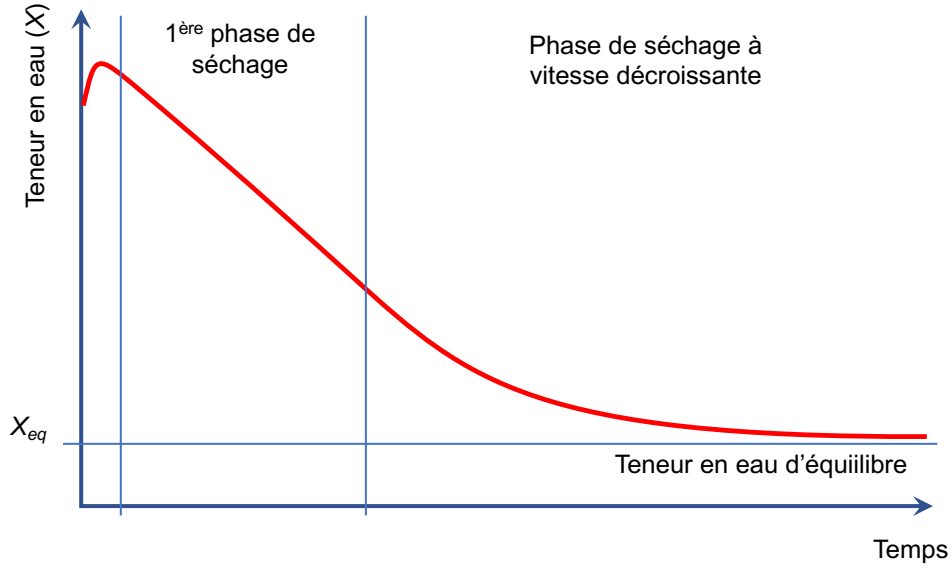


FIGURE 28 – Allure typique d’une cinétique de séchage.

à vitesse constante.

3.3.2 Le concept de courbe caractéristique

Le concept de "courbe caractéristique" permet de représenter un ensemble de résultats expérimentaux sous une forme simple et facilement exploitable. Il est né d’une série d’expérimentations menées, à épaisseur de produit donné, pour différentes valeurs de la température et de la vitesse de l’écoulement [Van Meel, 1958]. Une normalisation convenable permet de rassembler l’ensemble des vitesses de séchage tracées en fonction de la teneur en eau. Si la plage de variation des paramètres n’est pas trop étendue, ces courbes peuvent raisonnablement se réduire à une courbe unique : la courbe caractéristique (mais il ne faut pas oublier qu’il ne s’agit que d’une approximation).

La vitesse de séchage $\dot{X}$ est normée par la vitesse de séchage en première phase de séchage $\dot{X}_0$ pour obtenir une vitesse de séchage adimensionnelle f :

$$f = \frac{\dot{X}}{\dot{X}_0} \quad (122)$$

Par ailleurs, nous définissons la teneur en eau réduite par :

$$X^* = \frac{X - X_{eq}}{X_{cr} - X_{eq}} \quad (123)$$

X_{cr} est l’humidité critique de l’essai, qui marque la fin de la première phase de séchage. Cette valeur, bien définie en théorie, est souvent délicate à obtenir sur une courbe expérimentale. X_{eq} est l’humidité d’équilibre est fonction de l’air ambiant. Elle est déterminée par l’isotherme de sorption.

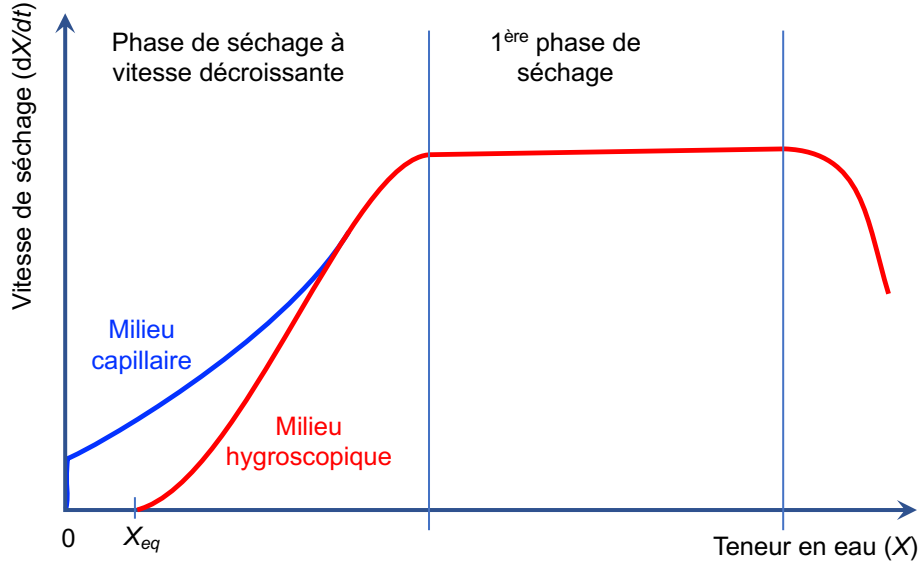


FIGURE 29 – Vitesse de séchage en fonction de l’humidité pour les deux principaux types de matériaux poreux. (Il s’agit de séchage convectif pour lequel les caractéristiques de l’écoulement sont maintenues constantes durant tout le processus).

La courbe caractéristique la plus simple que l’on puisse choisir se définit par :

$$f(X^*) = \min(X^*, 1) \quad (124)$$

Avec de telles hypothèses, la vitesse de séchage est définie par seulement deux paramètres ($\dot{X}_0$ et X_{cr}) : le premier ne dépend que des caractéristiques de l’écoulement (équations 52 et 113) tandis que le second intègre toute la complexité des phénomènes de transferts internes et externes (perméabilité, pression capillaire, épaisseur, niveau de température, intensité du séchage, teneur en eau initiale...). Dans ce cas simple, la cinétique de séchage (teneur en eau en fonction du temps) se calcule facilement de façon analytique et séparant la solution en deux parties : $X^* \geq 1$ et $X^* \leq 1$ (le lecteur pourra le faire à titre d’exercice). De plus, il est ainsi possible de résoudre analytiquement le séchage en milieu confiné (évolution spatio-temporelle de l’humidité dans une pile de bois selon le sens d’écoulement de l’air). C’est l’objet du paragraphe suivant. Il est bon de mentionner que, si une approche aussi simpliste ne permet pas de décrire les phénomènes intervenant à l’intérieur du produit, elle donne de bons résultats du point de vue énergétique et cinétique dès que les paramètres ont été définis expérimentalement pour des conditions de séchage proches des applications envisagées.

Intérêt pour le dimensionnement de séchoirs

Dans un séchoir convectif de produits solides, l’énergie nécessaire au chauffage du produit et à l’évaporation de l’humidité est prélevée sur la chaleur sensible de l’air. Ensuite, l’humidité qui sort du produit est véhiculée par ce même courant d’air. En conséquence, l’air se refroidit et s’humidifie au fur et à mesure qu’il circule dans un lit épais. Ceci a pour conséquence la réduction de la vitesse de séchage au fur et à mesure que l’on s’éloigne du point d’injection de l’air humide. Ce problème a été formalisé par Van Meel (1958). Partant du concept de courbe caractéristique, un bilan enthalpique local permet,

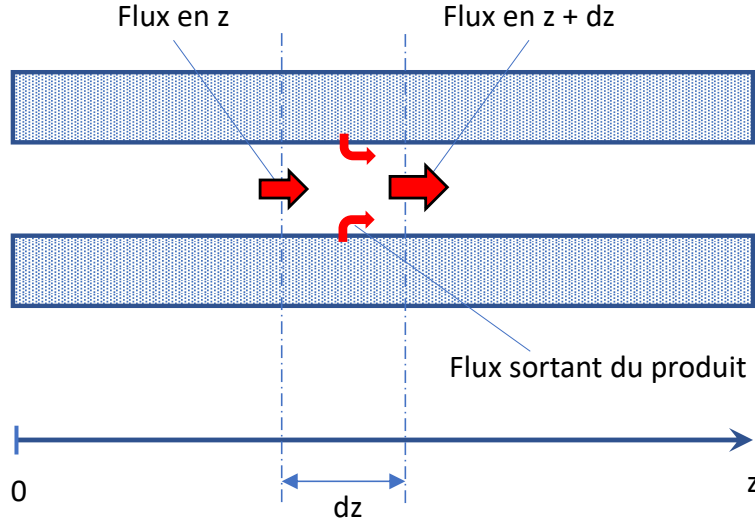


FIGURE 30 – Bilan de masse dans un séchoir en lit épais.

moyennant quelques hypothèses simplificatrices, d'obtenir un jeu d'équations différentielles très simple qui régit le phénomène. Un lit épais peut être constitué de particules entassées au travers desquels circule l'air asséchant. Les produits plus importants de forme plate (tuiles, plaque de plâtre, planches de bois...), sont souvent disposés en lits avec des espaces permettant à l'air de passer. C'est cette disposition qui est représentée sur le figure 30, mais la formulation suivante s'applique aussi dans le cas d'un lit épais de particules.

Avec les notations définies sur la figure 30, le bilan enthalpique dans la tranche d'écoulement dz s'écrit :

- Bilan de masse dans l'écoulement :

$$-\rho_0(1 - \epsilon)\dot{X} = \frac{dq_v}{dz} \quad (125)$$

- Vitesse de séchage du produit :

$$-\dot{X} = f(X^*) \times \dot{X}_0 = f(X^*) \times a h_m c M_v (x_{surf} - x_{v\infty}) \quad (126)$$

Dans les équations (125) et (126), ϵ est la "porosité" de l'écoulement (section de passage de l'air / section totale), a est la surface d'échange spécifique (surface d'échange par unité du volume) et q_v le flux spécifique de vapeur (débit massique ramené à la section totale). Les chaleurs sensibles ont été négligées.

Les deux équations précédentes peuvent être rendues adimensionnelles en faisant intervenir les nombres sans dimension suivants (q_a est le flux spécifique d'air sec) :

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{h_m c M_v a t}{\rho_0 [1 - \epsilon] [X_{cr} - X_{eq}]} \\ z^* &= \frac{h_m c M_v a z}{q_a} \\ \pi &= Y_h - Y_\infty \end{aligned} \quad (127)$$

Les deux bilans s'écrivent alors :

$$\frac{\partial X^*}{\partial t^*} = \frac{\partial \pi}{\partial z^*} = -\pi f(X^*) \quad (128)$$

Les deux équations (128) se prêtent bien à un traitement numérique. Cependant, lorsque la courbe caractéristique (124) est choisie, une résolution analytique est possible [Van Meel, 1958, Keey, 1978]. La solution adimensionnelle est tracée sur les figures 31 et 32.

Remarque : En vapeur surchauffée, le flux d'air sec est nul et l'humidité absolue est infinie. Cependant, le jeu d'équation (128) peut encore s'appliquer à condition d'utiliser le bilan enthalpique pour exprimer les nombres adimensionnels :

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{hat}{\rho_0[1 - \epsilon]C_{pv}[X_{cr} - X_{eq}]} \\ z^* &= \frac{haz}{C_{pv}q_v} \\ \pi &= \frac{C_{pv}[T_\infty - T_h]}{L_v} \end{aligned} \quad (129)$$

Sur la figure 31, la décroissance de la vitesse de séchage selon l'abscisse est nette. Pour un séchoir réel, il est possible de calculer la valeur maximale atteinte par z^* (équation 128 pour $z = L$, longueur totale de la pile dans le sens de l'écoulement). Il est alors possible, en reportant cette valeur sur l'abaque, de connaître l'hétérogénéité de l'humidité du produit au sein du séchoir au cours du séchage. Il est facile de remarquer que cette hétérogénéité croît au début du séchage et décroît en fin de procédé, pour s'annuler à nouveau de façon asymptotique (pour un temps infini, X^* est nul partout). Une application directe de cet abaque est l'obtention de la différence de teneur en eau entre le côté entrée et le côté sortie de l'écoulement en fin de séchage, c'est-à-dire pour une teneur en eau finale donnée. Sur le même graphe, il est possible d'étudier l'effet de la vitesse de l'air, ou de la "porosité" du lit (qui modifient le rapport entre z et z^*).

La figure 32 représente la vitesse de séchage réduite en fonction de l'abscisse à différents instants. Remarquer la décroissance exponentielle de la vitesse de séchage en première période (c'est-à-dire lorsque toutes les particules sont en première phase de séchage) et l'augmentation de la vitesse de séchage pour les z^* grands lorsque la zone d'entrée est déjà sèche.

4 Références bibliographiques

- R Byron Bird, Warren E Stewart, and Edwin N Lightfoot. *Transport phenomena*. New York, 1960.
- A. Houberechts. *La thermodynamique technique, tables et diagrammes thermodynamiques*. Bruxelles, 4ème édition, 1989.
- F.P. Incropera and D.P. DeWitt. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. New York, 1990.
- R. Keey. *Introduction to Industrial Drying Operations*. Pergamon Press, 1978.

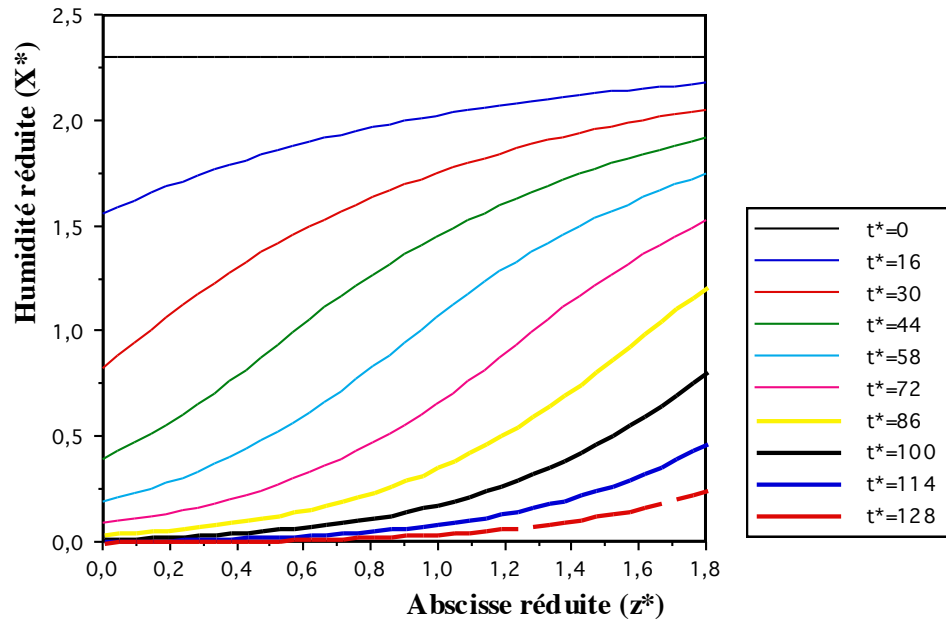


FIGURE 31 – Evolution spatiale de l'humidité adimensionnelle dans une pile de bois pour différents temps de séchage.

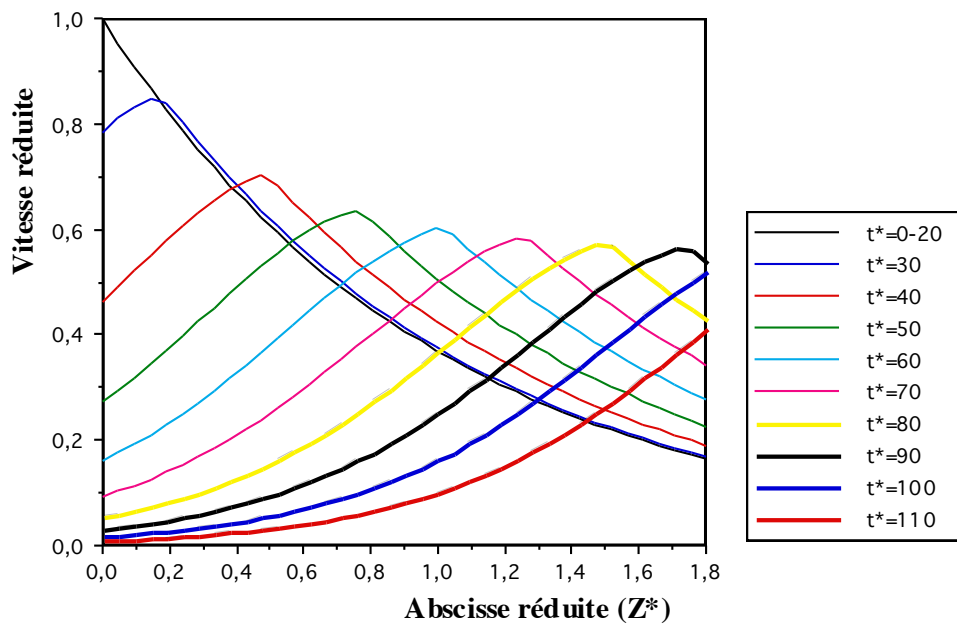


FIGURE 32 – Evolution spatiale de la vitesse de séchage adimensionnelle dans une pile de bois pour différents temps de séchage.

- O Krischer and K Kröll. *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungstechnik*. Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1956.
- P. Perré. *Le séchage du bois*, dans *Le bois, matériau d'ingénierie*, p. 201-287. ARBOLOR, 1994.
- P. Perré, editor. *Fundamentals of Wood Drying*. European COST and ARBOLOR, 2007.
- E. Sanchez-Palencia and A. Zaoui. Homogenization techniques for composite media. In *Homogenization techniques for composite media*, volume 272, 1987.
- D.A. Van Meel. Adiabatic convection batch drying with recirculation of air. *Chemical Engineering Science*, 9(1) :36–44, 1958.
- S. Whitaker. Simultaneous heat, mass, and momentum transfer in porous media : a theory of drying. In *Advances in heat transfer*, volume 13, pages 119–203. Elsevier, 1977.

A Annexes : données thermophysiques

Avertissement : Ces quelques données seront suffisantes pour la plupart des calculs d'ordre de grandeur que l'on est amené à effectuer dans le domaine du séchage. Les tableaux résultent d'une compilation de plusieurs ouvrages. Pour plus de cohérence, toutes les données sont exprimées en unités du système international. Sauf indication contraire, la température est en degrés Celsius, (elle est en degrés Kelvin lorsqu'il s'agit de comparer l'énergie thermique des molécules à une énergie de liaison). Précisons enfin que, d'une source à l'autre, les données peuvent être sensiblement différentes : dans la mesure du possible, plusieurs recoupements ont permis d'éviter des données visiblement erronées. Ceci n'est toutefois pas suffisant pour accorder un crédit illimité aux valeurs indiquées dans cette annexe.

A1 - Caractéristiques thermophysiques à différentes températures des trois principaux fluides rencontrés en séchage (eau, air, vapeur d'eau)

A2 - Pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température.

A3 - Caractéristiques complémentaires relatives à l'eau.

A4 - Caractéristiques thermophysiques de quelques solides

A5 - Autres données utiles

- quelques données sur la glace, - quelques données sur l'éthanol, - ordres de grandeurs des coefficients d'échange par convection. ?

A.1 Données thermophysiques de l'eau, de l'air et de la vapeur d'eau

T °C	ρ kg/m ³	μ kg/(m.s)	ν m ² /s	C_p J/(kg.K)	λ W/(m.K)	a m ² /s	Pr
EAU LIQUIDE							
0	1002	1,78.10 ⁻³	1,79.10 ⁻⁶	4218	0,552	1,31.10 ⁻⁷	13,6
10	1001	1,30.10 ⁻³	1,30.10 ⁻⁶	4192	0,586	1,37.10 ⁻⁷	9,30
20	1001	1,00.10 ⁻³	1,01.10 ⁻⁶	4182	0,597	1,43.10 ⁻⁷	7,02
40	995	0,651.10 ⁻³	0,658.10 ⁻⁶	4178	0,628	1,51.10 ⁻⁷	4,34
60	985	0,469.10 ⁻³	0,477.10 ⁻⁶	4184	0,651	1,55.10 ⁻⁷	3,02
80	974	0,354.10 ⁻³	0,364.10 ⁻⁶	4196	0,668	1,64.10 ⁻⁷	2,22
100	961	0,281.10 ⁻³	0,294.10 ⁻⁶	4216	0,680	1,68.10 ⁻⁷	1,74
120	945	0,234.10 ⁻³	0,247.10 ⁻⁶	4250	0,685	1,71.10 ⁻⁷	1,45
140	928	0,198.10 ⁻³	0,214.10 ⁻⁶	4283	0,684	1,72.10 ⁻⁷	1,24
VAPEUR D'EAU							
0	0,822	0,847.10 ⁻⁵	1,03.10 ⁻⁵	1860	0,0163	1,03.10 ⁻⁵	1,000
20	0,758	0,917.10 ⁻⁵	1,21.10 ⁻⁵	1870	0,0179	1,26.10 ⁻⁵	0,958
40	0,708	0,991.10 ⁻⁵	1,40.10 ⁻⁵	1890	0,0195	1,46.10 ⁻⁵	0,961
60	0,663	1,061.10 ⁻⁵	1,60.10 ⁻⁵	1910	0,0212	1,77.10 ⁻⁵	0,906
80	0,624	1,111.10 ⁻⁵	1,78.10 ⁻⁵	1950	0,0229	1,88.10 ⁻⁵	0,946
100	0,589	1,202.10 ⁻⁵	2,04.10 ⁻⁵	2010	0,0248	2,09.10 ⁻⁵	0,974
120	0,558	1,278.10 ⁻⁵	2,29.10 ⁻⁵	2090	0,0268	2,30.10 ⁻⁵	0,997
140	0,530	1,346.10 ⁻⁵	2,54.10 ⁻⁵	2210	0,0288	2,46.10 ⁻⁵	1,033
AIR SEC							
-23	1,413	1,60.10 ⁻⁵	1,13.10 ⁻⁵	1003	0,0223	1,57.10 ⁻⁵	0,722
2	1,284	1,72.10 ⁻⁵	1,34.10 ⁻⁵	1004	0,0243	1,88.10 ⁻⁵	0,713
27	1,177	1,85.10 ⁻⁵	1,57.10 ⁻⁵	1005	0,0262	2,21.10 ⁻⁵	0,708
52	1,086	1,97.10 ⁻⁵	1,81.10 ⁻⁵	1006	0,0282	2,58.10 ⁻⁵	0,701
77	0,998	2,08.10 ⁻⁵	2,08.10 ⁻⁵	1008	0,0300	2,98.10 ⁻⁵	0,697
102	0,941	2,18.10 ⁻⁵	2,32.10 ⁻⁵	1011	0,0319	3,35.10 ⁻⁵	0,692
127	0,883	2,29.10 ⁻⁵	2,59.10 ⁻⁵	1014	0,0337	3,76.10 ⁻⁵	0,689
177	0,783	2,48.10 ⁻⁵	3,17.10 ⁻⁵	1021	0,0371	4,64.10 ⁻⁵	0,683

A.2 Pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température

Les valeurs proviennent d'un tableau où la pression était exprimée en mmHg. Il ne faut pas attribuer une précision supérieure à la dizaine de Pa pour les températures supérieures à 60 °C.

T (°C)	P_{vs} (Pa)	P_{vs}/P_{atm} (%)	T (°C)	P_{vs} (Pa)	P_{vs}/P_{atm} (%)	T (°C)	P_{vs} (Pa)	P_{vs}/P_{atm} (%)
-16	176	0,17	40	7376	7,28	96	87675	86,5
-14	208	0,21	42	8199	8,09	98	94295	93,1
-12	245	0,24	44	9101	8,98	100	101325	100
-10	287	0,28	46	10086	9,95	102	108772	107
-8	335	0,33	48	11160	11,0	104	116665	115
-6	391	0,39	50	12334	12,2	106	125046	123
-4	455	0,45	52	13611	13,4	108	133912	132
-2	527	0,52	54	15000	14,8	110	143263	141
0	610	0,60	56	16505	16,3	112	153153	151
2	706	0,70	58	18143	17,9	114	163620	161
4	813	0,80	60	19916	19,7	116	174644	172
6	935	0,92	62	21834	21,5	118	186275	184
8	1073	1,06	64	23906	23,6	120	198536	196
10	1228	1,21	66	26143	25,8	122	211455	209
12	1402	1,38	68	28554	28,2	124	225023	222
14	1598	1,58	70	31157	30,8	126	239330	236
16	1818	1,79	72	33944	33,5	128	254356	251
18	2063	2,04	74	36957	36,5	130	270132	267
20	2338	2,31	76	40183	39,7	132	286699	283
22	2643	2,61	78	43636	43,1	134	304076	300
24	2983	2,94	80	47343	46,7	136	322152	318
26	3361	3,32	82	51316	50,6	138	341395	337
28	3780	3,73	84	55569	54,8	140	361426	357
30	4243	4,19	86	60115	59,3	142	382299	377
32	4755	4,69	88	64941	64,1	144	404185	399
34	5319	5,25	90	70096	69,2	146	427085	422
36	5941	5,86	92	75592	74,6	148	450998	445
38	6625	6,54	94	81447	80,4	150	476025	470

Corrélation utilisable en pratique

La relation $P_{vs} = \exp(25,5058 - 5204,9/T)$ (P_{vs} en Pa et T en Kelvin) est obtenue en attribuant une valeur moyenne, donc indépendante de la température, à la chaleur latente de vaporisation. Dans la plage 0°C - 100°C, elle donne la pression de vapeur saturante avec une erreur relative qui reste inférieure à 3%.

Pour plus de précision, il est possible d'utiliser l'expression suivante :

$$P_{vs}(T_k) = 10^5 \exp(65.832 - 8.2 \log(T_k) + 5.717 \cdot 10^{-3} T_k - 7235.46/T_k)$$

where T_k is in Kelvin and P_{vs} in Pa

A.3 Données complémentaires sur l'eau

Chaleur latente de vaporisation (kJ/kg)

Cette grandeur varie avec la température. La pente de la droite (valeur moyenne) est proche de la différence entre la chaleur massique de la vapeur et celle de l'eau. En effet, l'enthalpie, fonction d'état, ne dépend pas du chemin suivi au cours de la transformation. Elle doit être la même si, par exemple, l'eau est vaporisée puis chauffée ou chauffée puis vaporisée :

$$L_v(0C) = 2503 \text{ kJ/kg} \text{ et } L_v(100C) = 2257 \text{ kJ/kg}$$

soit $L_v(T) = 2503 - 2,46T$ (T en C)

Coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air (m^2/s)

$$D_v = 2,26 \cdot 10^{-5} \frac{P_0}{P} \frac{T}{273}^{1,81} \text{ avec } P \text{ en } Pa \text{ et } T \text{ en } K \quad (P_0 = 10^5 Pa)$$

Tension superficielle σ ($J.m^{-2}$ ou $N.m^{-1}$)

Cette grandeur est liée à l'énergie de l'interface entre deux fluides non miscibles. Plus précisément, c'est l'accroissement d'énergie ramenée à l'accroissement de surface. Ceci résulte de l'agencement particulier des molécules placées à l'interface. Pour une interface eau-air, la tension superficielle, qui diminue avec la température, peut s'exprimer par la formule :

$$\sigma = (77,5 - 0,185T)10^{-3} N/m \quad (T \text{ en } ^\circ C)$$

A.4 Caractéristiques typiques de quelques solides

Nature du solide	Masse volumique ρ ($kg.m^{-3}$)	Chaleur massique C_p ($J.kg^{-1}.K^{-1}$)	Conductivité λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	Diffusivité a ($m^2.s^{-1}$)
Argent	10500	230	418	$1,71.10^{-4}$
Cuivre	8940	380	390	$1,14.10^{-4}$
Aluminium	2700	860	200	$0,86.10^{-4}$
Laiton (70Cu-30Zn)	8500	370	100	$0,33.10^{-4}$
Acier (0,1% C)	7850	490	40	$0,12.10^{-4}$
Acier Inox 18/8	7900	510	15	$0,04.10^{-4}$
Béton	2300	960	0,92	$0,42.10^{-6}$
Granite	2600	870	2,5	$1,10.10^{-6}$
Verre	2500	700 - 930	1,2	—
Neige poudreuse	100	2100	0,05	$0,24.10^{-6}$
Neige lourde	500	2100	0,16	$0,15.10^{-6}$
Bois $\perp$ fibres sec	400-600	1250	0,1 - 0,2	—
humide	—	—	0,2 - 0,5	—
Bois $\parallel$ aux fibres	dans le sens des fibres, λ est à peu près doublé			
Téflon	2200	1040	0,23	$0,10.10^{-6}$
PVC	1380	960	0,15	$0,11.10^{-6}$
Amiante	580	810	0,16	$0,34.10^{-6}$
Polystyrène expansé	15 - 100	1250	0,025 - 0,045	—
Laine de verre	200	670	0,04	$0,30.10^{-6}$

A.5 Autres données utiles

Données sur la glace

Chaleur latente de fusion : $L_f \approx 334 \text{ kJ/kg}$

Masse volumique : $\rho = 920 \text{ kg/m}^{-3}$

Conductivité thermique : $\lambda \approx 1,9 \text{ à } 2,2 \text{ W/m.K}$ (la glace existe sous plusieurs états)

Chaleur massique : $C_p(0C) = 2040 \text{ J/kg.K}$
 $C_p(-20C) = 1945 \text{ J/kg.K}$

Données sur l'éthanol (C_2H_5OH)

Point d'ébullition : $78,4^\circ\text{C}$

Masse molaire : $46.10^{-3} \text{ kg.mole}^{-1}$

Coefficient de diffusion de la vapeur dans l'air $D_v(0C) = 1,013.10^{-5}$
 $D_v(40C) = 1,18.10^{-5}$

Chaleur massique du liquide : $C_p(20C) = 2430 \text{ J/kg.C}$

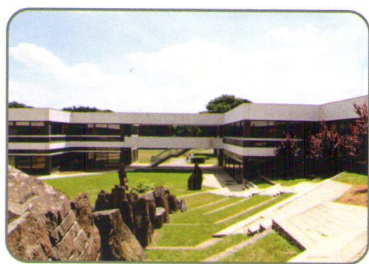
T $^\circ\text{C}$	L_v kJ/kg	ρ kg/m ³	λ_ℓ W/(m.K)	μ_ℓ kg/(m.s)	μ_v kg/(m.s)	P_v kPa	C_{pv} J/(kg.K)	$\sigma \times 10^3$ N/m
-10	929	813	0,173	2,20	0,80	2	1310	26,6
10	905	798	0,170	1,50	0,85	3	1370	25,7
30	889	781	0,168	1,02	0,91	10	1440	24,4
70	859	743	0,165	0,51	1,02	76	1580	21,7
110	787	704	0,160	0,28	1,13	266	1720	18,9

Ordres de grandeurs des coefficients d'échange par convection ($W/m^2.^\circ\text{C}$)

Convection naturelle gaz : 5-20
 eau : 100-600

Convection forcée gaz : 10-100
 eau : 500-10⁴

Transferts couplés de masse et de chaleur



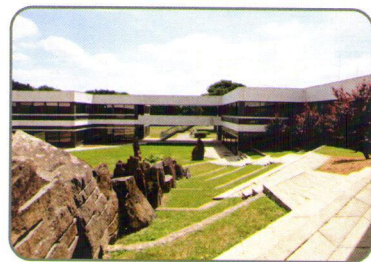
CentraleSupélec

Campus Paris-Saclay (siège)
3 rue Joliot-Curie
F-91192 Gif-sur-Yvette Cedex
Tél : +33 (0)1 69 85 12 12
Fax : +33 (0)1 69 85 12 34



Campus de Metz

Metz Technopôle
2 rue Edouard Belin
F-57070 Metz
Tél : +33 (0)3 87 76 47 47
Fax : +33 (0)3 87 76 47 00



Campus de Rennes

Avenue de la Boulaie
C.S. 47601
F-35576 Cesson-Sévigné Cedex
Tél : +33 (0)2 99 84 45 00
Fax : +33 (0)2 99 84 45 99